Existenz und Eindeutigkeit temporärer Gleichgewichte in einem Drei-Güter-Modell

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Grades eines Doktors

der

Wirtschafts- und Gesellschaftswissenschaften

durch die

Rechts- und Staatswissenschaftliche Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität

zu

Bonn

vorgelegt von

Georg Tillmann

aus

Meschede

Bonn 1979

Existenz und Eindeutigkeit temporärer Gleichgewichte in einem Drei-Güter-Modell

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Grades eines Doktors

der

Wirtschafts- und Gesellschaftswissenschaften

durch die

Rechts- und Staatswissenschaftliche Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität

zu

Bonn

vorgelegt von

Georg Tillmann

aus

Meschede

Bonn 1979

Dekan: Professor Dr. Tomuschat

Erstreferent: Professor Dr. Hildenbrand
Zweitreferent: Professor Dr. Hellwig

Tag der mündlichen Prüfung: 5. Oktober 1979

Vorwort

Ich danke Herrn Professor Dr. Werner Hildenbrand für die Anregung zu dieser Arbeit und die mir gewährte Hilfestellung während der Zeit des Entstehens, Herrn Dr. Reinhard John für die interessanten Diskussionen sowie Ulrike Schwarz und Gaby Saupe für das -oft mühevolle- Tippen des Textes.

Georg Tillmann

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Inhaltsverzeichnis :

Einleitung		1
Das Modell		6
I	Konsumenten	6
	Komparative Statik	15
	Auswirkungen von Erwartungsveränderungen auf die Geldhaltung	24
	Geldillusion, Real-balance-Effekt	26
	Zusammenfassung	41
II	Der Produktionssektor	43
	Komparative Statik	66
	Veränderung der Erwartung bezüglich Rationierung	74
	Zusammenfassung	76
III	Gleichgewichtssätze	77
	Unsicherheit bezüglich Preis und Lohn	98
	Eindeutigkeit	111
	Zusammenfassung	123
IV	Der ℓ - Güter Fall	124
V	Keynes'sche Gleichgewichte	142
	Der Preis-Lohn-Bereich der Keynes-Gleichgewichte	157
Zusammenfassung		169
Anhang		170
Fußnoten		172
Symbolverzeichnis		173
Literaturverzeichnis		174

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41536524_0030

Einleitung

Wird Geld in die allgemeine Gleichgewichtstheorie eingeführt, so muß die klassische Arrow-Debreu-Theorie abgeändert werden. Findet der "Tauschprozeß" nur zu Beginn der ersten Periode statt, so ist für Geld in dem System kein Platz, weder als Tausch- noch als Wertaufbewahrungsmittel, selbst, wenn wie in Debreu's "Theory of Value" Unsicherheit eingeführt wird. Ist das Individuum aber gezwungen, Entscheidungen jeweils zu Beginn aufeinanderfolgender Perioden zu treffen, d.h. geht man zu sukzessiven Märkten über, so wird Geld zu einem Mittel, das solche Märkte miteinander verbindet. Suchen wir nun wieder Gleichgewichtszustände, so kommen wir zum Begriff des "Temporären Gleichgewichtes", der schon von Hicks in seinem Buch "Value and Capital" verwandt und von Patinkin [22] und anderen weiter benutzt wurde. Nun beschäftigt sich Patinkin [22] (siehe besonders Kap. 2, 3) hauptsächlich mit der Komparativen Statik von Gleichgewichtszuständen, ohne auf deren Existenz näher einzugehen. Der erste, der dieses Problem aufgriff, war Hahn [15] . Er bewies, daß ein Gleichgewicht existiert, wenn unter anderem die Gesamtnachfrage nach Geld bei positivem Geldpreis und jedem nichtnegativen Güter-Preisvektor strikt größer als Null ist. In dieser Form war das ein unbefriedigendes Ergebnis, da es nicht aus Konsumentencharakteristika abgeleitet ist. Grandmont [11] hat nun explizit gezeigt, wie stark die Existenz eines temporären Gleichgewichtes von der Erwartungsbildung der jeweiligen Wirtschaftssubjekte abhängt. Er gibt ein Beispiel [11, S.223], in dem die Konsumenten Patinkin's statische Erwartungen (Preise morgen = Preise heute) haben und in dem kein Gleichgewicht existiert.

Er zeigt dann die Existenz eines Gleichgewichtes unter der Annahme, daß die Preiserwartungen nicht zu stark von der heutigen Situation abhängen - sie müssen in einem Kompaktum liegen (tightness-Bedingung). In sehr vielen nachfolgenden Arbeiten (siehe etwa Grandmont [12,13] , Sondermann [27]) wird ihre Gültigkeit vorausgesetzt. So interessant und wichtig diese Arbeiten sind, beantworten sie doch nicht die Frage, unter welchen Annahmen das Patinkin-Modell doch noch konsistent ist. Ein Schritt in diese Richtung wurde dann von Hool [18] getan, indem er die Clowersche [7] Idee aufgriff : Geld erhält hier eine besondere Funktion als Tauschmittel, indem die Ausgaben einer Periode ganz durch die Erstgeldausstattung und nicht durch die Güterverkäufe gedeckt werden müssen. Hool [18] ist dann in der Lage, nach oben unbeschränkte Erwartungen zuzulassen.

Alle bisher erwähnten Arbeiten gehen von einer reinen Tauschwirtschaft aus, nur in Grandmont-Laroque [12] und Sondermann [27] ist der Produktionssektor mit einbezogen - auch hier wird jeweils die tightness-Annahme benutzt.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist nun :

Es soll gezeigt werden, unter welchen Annahmen an die individuellen Charakteristika in einem einfachen 3 Güter-Modell mit temporär behandelter Produktion auch bei statischen Erwartungen ein temporäres, walrasianisches Gleichgewicht existiert und wann es eindeutig ist, Da der Erwartungsbildung dabei natürlich eine zentrale Rolle zukommt, ist es nötig, die Nachfrage des Konsumenten und Produzenten in eben dieser Abhängigkeit von den Erwartungen

näher zu bestimmen und zu untersuchen. Damit sind wir dann auch in der Lage, Aussagen über (temporäre) keynesianische Gleichgewichte zu machen, indem wir nachprüfen, ob die auf mikrotheoretischer Basis erhaltenen Ergebnisse "durch Aggregation" zu den etwa von Hildenbrand [17] gemachten Annahmen führen. Da wir dabei die Eindeutigkeit des Walras-Gleichgewichtes benötigen, kommt der Einführung statischer Erwartungen damit besondere Bedeutung zu : Obwohl sich Existenzbeweise mit Grandmont'schen (beschränkten) Erwartungen unter allgemeinen Voraussetzungen durchführen lassen, läßt sich dort über die Eindeutigkeit keine Aussage machen. In vielen Fällen ist sie sogar nicht gewährleistet. Zum anderen gilt, daß viele geldtheoretische Aussagen, wie etwa die "Quantity Theory of Money" i.a. erst bei statischen Erwartungen gültig sind. (Wir benutzen hier natürlich die Patinkin [22] Definition der Quantitätstheorie).

Die Arbeit gliedert sich nun in fünf Teile :

Nach Einführung des Modells wird in Teil 1 der Konsument näher untersucht. Es wird analysiert, wie Konsum und Geldhaltung auf Preis-, Lohn-, sowie Erwartungsänderungen reagieren ; in welchen Fällen der Konsument der Geldillusion unterliegt und ein Realbalance-Effekt, der von Patinkin [22] als fundamental angesehen wird, vorliegt. Diese Ergebnisse sind für die Eindeutigkeit des Walras Gleichgewichtes von großer Wichtigkeit.

In Teil 2 werden die Entscheidungen des Produktionssektors, der nicht mehr atemporär behandelt wird, näher untersucht. Wir nehmen dabei an, daß es Lagerhaltung gibt, die Produktion Zeit erfordert und der Produzent Preis- und Absatzerwartungen für den morgigen Output hat. Es wird dann gezeigt, wie in Abhängigkeit

dieser Erwartungen Konsumgüterverkauf und Arbeitsnachfrage auf Veränderungen von Preis und Lohn reagieren.

Wie schon erwähnt, werden die Ergebnisse dieser beiden Kapitel für Existenz- und Eindeutigkeitssätze benötigt. Doch auch unabhängig davon ist es interessant, die Auswirkungen von Preis-Lohn-Veränderungen auf die Nachfrage explizit zu betrachten, da wegen der Abhängigkeit von den Erwartungen Effekte auftreten können, die bei der gewöhnlichen Nachfragebestimmung ausgeschlossen sind (wie etwa, daß mit steigendem Preis p der Konsum c zunimmt ($\frac{\partial c}{\partial p} > 0$) oder der Verkauf V seitens der Firma fällt ($\frac{\partial V}{\partial p} < 0$) . Es zeigt sich jedoch, daß diese Phänomene bei "vernünftigen" Erwartungen, d.h. solchen, die nicht hyperinflationär sind, nicht vorkommen.

In Teil 3 zeigen wir Existenz- und Eindeutigkeitssätze, zuerst in einem Modell mit atemporärem Produktionssektor, dann in dem vorstehend beschriebenen Modell. Dabei sind wir gezwungen, einschränkende Bedingungen an Nutzen- und Produktionsfunktionen , sowie an die Erwartungen zu stellen. In Satz 7 liegen noch Punkterwartungen vor, in Satz 8 werden morgiger Preis und Lohn als Zufallsvariablen angenommen. Ein Gleichgewicht existiert dann, wenn die Konsumenten - neben Randbedingungen an die Nutzenfunktion - unsicher sind über ihr morgiges Einkommen und ihre Erwartungen bezüglich Preis und Lohn nicht allzu elastisch sind, dasselbe gilt für die Preiserwartung der Produzenten. Eindeutig ist das Gleichgewicht dann, wenn neben einer zusätzlichen Bedingung an die Produktionsfunktionen alle Wirtschaftssubjekte lineare Erwartungen haben.

Im 4ten Teil diese Arbeit untersuchen wir die naheliegende Frage, ob sich der Existenzsatz auf ein ℓ - Güter - Modell übertragen läßt. Die Antwort ist positiv, jedoch unter weiteren Annahmen an die Nutzenfunktion : Sie muß wenigstens teilweise additiv sein.

Im fünften und letzten Abschnitt untersuchen wir mithilfe der in den vorherigen Teilen erhaltenen Ergebnisse Keynessche Gleichgewichte. Wir beziehen uns dabei hauptsächlich auf die Arbeit von Hildenbrand [17]. Wegen der allgemeinen Behandlung der Firma erhalten wir dabei natürlich schwächere Aussagen als in der zitierten Arbeit. Es stellt sich dabei wiederum heraus, daß vernünftige Ergebnisse nur dann zu erhalten sind, wenn alle Marktteilnehmer lineare Erwartungen haben.

Das Modell

Wir betrachten eine Ökonomie mit 3 Gütern,

einem Konsumgut c

Arbeit l

Geld m

und einer endlichen Zahl von Konsumenten (indiziert durch i in der endlichen Menge I, $|I| = n$) und einer endlichen Zahl von Produzenten (indiziert durch j aus J, $|J| = m < \infty$). Die Ökonomie erstreckt sich über zwei Perioden, Periode 1 und 2 .

Diese können entweder als zwei aufeinanderfolgende Hicks'sche Wochen t und t+1 in einer unendlichen Folge von Märkten, die an jedem "Montag" abgehalten werden, interpretiert werden- alle Marktteilnehmer verhalten sich dann so, als ob ihre ökonomischen Aktivitäten am Schluß der t+1-ten Woche beendet wären - oder einfach als Gegenwart und Zukunft.

Das Konsumgut habe den Preis p , w sei der Lohnsatz und Geld besitze immer den Preis 1. Die Konsumenten maximieren ihren erwarteten Nutzen, die Produzenten ihre erwarteten Profite- jeweils auf die beiden Perioden bezogen.

I Konsumenten:

Da das Konsumgut für den Konsumenten als nicht lagerbar angenommen wird, stellt Geld das einzige Wertaufbewahrungsmittel dar. Konsument i kauft heute c_{1i} Einheiten des Konsumgutes zu einem festen Preis p_1 und verkauft $\bar{l}_i$ Einheiten Arbeit zum Lohnsatz w_1 . Dabei ist sein Arbeitsangebot preis- und lohnunabhängig. Seine (aus der letzten Periode) stammende anfängliche Geldhaltung sei m_{oi} . Obwohl sich die folgenden Resultate

grundsätzlich auch auf Konsumenten anwenden lassen, die heute arbeitslos sind, wollen wir uns wegen der später zu zeigenden Gleichgewichts-Existenzsätze auf heute Beschäftigte beschränken. Diese haben nun aufgrund bestimmter Erfahrungen aus der Vergangenheit Erwartungen, die vom heutigen Zustand wie folgt abhängen : Herrschen heute Preis p_1 und Lohn w_1 , so hat der Konsument i Punkterwartungen über den morgigen Preis p_2 und den Lohn w_2 , dabei gilt:

$$p_2 =: f_i(p_1),\ f_i: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \qquad (A1)$$

$$w_2 =: g_i(w_1),\ g_i: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$$

f_i und g_i sind stetig und auf $\mathbb{R}_{++}$ differenzierbar ,

$$\forall\ p_1\ ,\ p_1 > 0 : f_i(p_1) > 0$$

Bemerkung :
Allgemein sind Erwartungen möglich, die von Preis und Lohn abhängen, also $p_2 = f(p_1,w_1)$ und $w_2 = g(p_1,w_1)$. Da wir jedoch Komparative Statik betreiben wollen, beschränken wir uns der Einfachheit halber auf den angegebenen Funktionstyp. Wir werden später (siehe dazu Bemerkung zu Satz 7) auf die allgemeinen Erwartungen zurückkommen.

Der Konsument i glaubt nun, mit der Wahrscheinlichkeit q_i $(o \le q_i \le 1)$ auch morgen beschäftigt zu sein (dementsprechend mit $(1-q_i)$ arbeitslos zu sein).

Jedes Individuum besitzt eine 2-Perioden-Nutzenfunktion $u_i(c_{1i}, c_{2i})$. Dabei ist c_{1i} der heutige und c_{2i} der morgige Konsum. An u_i machen wir die folgenden Annahmen:

A2) $u_i(c_{1i},c_{2i})$ ist auf $\mathbb{R}^2_+$ stetig, strikt konkav und strikt monoton wachsend.[1)]

A3) $u_i(c_{1i},c_{2i})$ ist zusätzlich auf $\mathbb{R}^2_{++}$ zweimal stetig differenzierbar, und $u_{i12} \geq 0$.

Wegen der strikten Monotonie und Konkavität gilt schon :

$u_{i1} > 0$, $u_{i2} > 0$

$u_{i11} < 0$, $u_{i22} < 0$

Dabei sei wie üblich $u_{i1} = \frac{\partial u_i}{\partial c_{1i}}$, $u_{i11} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial c_{1i}^2}$ usw.

Bemerkung: In der Menge der zulässigen Nutzenfunktionen sind natürlich auch diejenigen enthalten, die sich additiv schreiben lassen, also $u_i(c_{1i}, c_{2i}) = v(c_{1i}) + \alpha v(c_{2i})$, $\alpha > 0$, $v' > 0$, $v'' < 0$.

Wir nehmen weiterhin an, daß das Individuum i keine Erwartungen über die morgige Periode hinaus hat, es hält daher morgen kein Geld mehr, und daß es mit Sicherheit kein Nicht-Arbeitseinkommen, wie etwa Anteile der Firmenprofite oder im Falle der morgigen Nichtbeschäftigung ein Arbeitslosengeld erhält. In einem erweiterten Modell müßten diese restriktiven Annahmen natürlich aufgegeben werden.

Zusammenfassend wird also ein Konsument beschrieben durch

$(u_i, m_{oi}, \bar{I}_i, q_i, f_i, g_i) =: t_i$

Def 1: Ein durch t_i beschriebener Konsument heißt C1-Typ, wenn A1)- A3) erfüllt ist und $m_{oi} \geq 0$, $0 \leq q_i \leq 1$, $\bar{I}_i > 0$ gilt .

Aus Vereinfachungsgründen wird im folgenden der Index i weggelassen. Nun hat jeder Konsument heute eine Aktion $a_1 = (c_1, m_1)$ zu wählen, m_1 ist dabei der Betrag an Geld, der nach morgen transferiert werden soll. Ziel ist es, den erwarteten Nutzen zu maximieren, also formal

max $E_q [u(c_1, c_2)]$ unter den Nebenbedingungen .

1) $c_1 \geq o \; , \; c_2 \geq o \; , \; m_1 \geq o$

2) $p_1 c_1 + m_1 = w_1 \bar{l} + m_o$

3) $$c_2 = \begin{cases} \dfrac{m_1 + g(w_1)\bar{l}}{f(p_1)} & \text{mit Wahr. } q \\ \dfrac{m_1}{f(p_1)} & \text{mit Wahr. } (1-q) \end{cases}$$

1) ist dabei die übliche Bedingung, daß Konsum und Geldhaltung nicht negativ sein können, 2) ist die heutige Budgetbedingung und 3) gibt an, wie groß der morgige Konsum ist.
Die sich durch Anwendung der dynamischen Programmierung ergebende indirekte Nutzenfunktion V erhält man hier einfach als:

$$V(c_1, m_1, p_1, w_1) = qu(c_1, \frac{m_1 + g(w_1)\bar{l}}{f(p_1)}) + (1-q)\, u(c_1, \frac{m_1}{f(p_1)})$$

Für $p_1 > o$ ist V dann in allen vier Argumenten stetig, da $f(p_1) > 0$ und f, g, u stetige Funktionen sind.
Wir betrachten daher nur (p_1, w_1) mit $p_1 > o$.

Aussagen über optimale Aktionen a_1 macht der folgende

Satz 1

Der Konsument sei vom C-1 Typ

Ist $p_1 > o$, so ist V stetig.

Zu jedem (p_1, w_1) , $p_1 > o$ gibt es eine eindeutige Nachfrage (c_1, m_1) . c_1 und m_1 sind stetige Funktionen in (p_1, w_1) Sie erfüllen die Gleichung

[G] $$q[u_1(c_1, \frac{m_1 + g(w_1)\bar{1})}{f(p_1)} - \frac{p_1}{f(p_1)} u_2(c_1, \frac{m_1 + g(w_1)\bar{1})}{f(p_1)})]$$

$$+ (1-q)[u_1(c_1, \frac{m_1}{f(p_1)}) - \frac{p_1}{f(p_1)} u_2(c_1, \frac{m_1}{f(p_1)})] - p_1\mu_1 + \mu_2 = o$$

und natürlich $p_1c_1 + m_1 = w_1\bar{1} + m_o$.

$$\mu_i \geq o,\ \mu_1 m_1 = o = \mu_2 c_1, \quad i = 1,2$$

Beweis:

Die Stetigkeit von V gilt schon nach der obigen Bemerkung.

Sei $p_1 > o$, $w_1 \geq o$, $m_o \geq o$, $E := \mathbb{R}_{++} \times \{0\}$

Die Korrespondenz $\beta : \mathbb{R}^2_{++} \cup E \to \mathbb{R}^2_+$

$$(p_1, w_1) \to \{(c_1, m_1) | p_1c_1 + m_1 \leq w_1\bar{1} + m_o\}$$

ist kompaktwertig , $\neq \phi$ und stetig. $V(c_1, m_1, p_1, w_1)$ ist stetig und nimmt daher-nun für festes (p_1, w_1)— auf einem Kompaktum Maxima an. Da u strikt konkav,- mithin auch $V(.,p_1,w$ ist dieses Maximum eindeutig bestimmt. Indem man Satz 2, Anhang, anwendet, erhält man die Stetigkeit von (c_1, m_1) in (p_1, w_1) . Natürlich sind (c_1, m_1) auch in q stetig. Wir erhalten das Maximum nun durch einen Kuhn-Tucker Ansatz:

$$K(c_1, m_1, \lambda, \mu_i) = q\, u(c_1, \frac{m_1 + g(w_1)\bar{I}}{f(p_1)} + (1-q)u_1(c_1, \frac{m_1}{f(p_1)})$$

$$+ \lambda(p_1c_1 + m_1 - w_1\bar{I} - m_o) + \mu_1 m_1 + \mu_2 c_1, \quad \mu_i \geq o\ ,\ i = 1,2$$

$$\mu_1 m_1 = o$$

$$\mu_2 c_1 = o$$

$$\frac{\partial K}{\partial c_1} = qu_1(c_1, \frac{m_1 + g(w_1)\bar{I}}{f(p_1)} + (1-q)u_1(c_1, \frac{m_1}{f(p_1)}) + \lambda p_1 + \mu_2 = o$$

$$\frac{\partial K}{\partial m_1} = qu_2(c_1, \frac{m_1 + g(w_1)\bar{I}}{f(p_1)}) \cdot \frac{1}{f(p_1)} + (1-q)u_2(c_1, \frac{m_1}{f(p_1)}) \cdot \frac{1}{f(p_1)} + \lambda + \mu_1 = o$$

$$\frac{\partial K}{\partial \lambda} = p_1c_1 + m_1 - w_1\bar{I} - m_o = o$$

$$\mu_1 m_1 = o\ ,\ \mu_1 \geq o\ ,\ \mu_2 c_1 = o\ ,\ \mu_2 \geq o$$

Nun sind, wie oben gezeigt wurde, diese notwendigen Bedingungen auch hinreichend, durch Elimination von λ erhält man dann die Gleichung (G).

Abkürzend sei $A := \frac{m_1 + g(w_1)\bar{I}}{f(p_1)}$ und $B := \frac{m_1}{f(p_1)}$

gesetzt. Wir benutzen weiterhin aus Vereinfachungsgründen

$u_1(O,d) = \infty$ für : $\lim_{c \to o} u_1(c,d) = \infty$ und

$u_1(\infty,d) = O$ für : $\lim_{c \to \infty} u_1(c,d) = O$

analog bei u_2 .

Wir wollen nun untersuchen, in welchen Fällen Konsum und Geldhaltung positiv sind. Antwort darauf gibt :

Lemma 1:

Der Konsument sei vom C1-Typ und $m_o > 0$.

Gilt

a) $u_1(o, d) = \infty \quad \forall\, d > o$, so ist $c_1(p_1, w_1) > 0$

b) $u_2(d, o) = \infty \quad \forall\, d > o$ und $q < 1$, so ist $m_1(p_1, w_1) > 0$

Unter beiden Voraussetzungen, also a) und b), sind c_1 und m_1 sogar differenzierbar in (p_1, w_1) .

Beweis:

a) Ann: Es gibt (p_1, w_1), $p_1 > o$ mit $c_1(p_1, w_1) = o$

Dann ist $m_1 > o$, also $\mu_1 = o$, somit gilt für (G):

$$o = q\, u_1(o, A) + (1-q) u_1(o, B) - \frac{p_1 q}{f(p_1)}\, u_2(o, A)$$

$$- \frac{p_1(1-q)}{f(p_1)} u_2(o, B) + \mu_2 > o \quad , \text{ da } A, B > o \text{ gilt ,}$$

$\frac{p_1}{f(p_1)} < \infty$ und $u_1(o, d) = \infty$ ist, aber $u_2(o, d)$ beschränkt bleibt. Also gilt immer $c_1(p_1, w_1) > o$.

b) Ann: $m_1 = o$, dann ist wegen der Budgetbedingung $c_1 > o$, also $\mu_2 = o$. Analog zu a) erhält man dann einen Widerspruch, denn wegen $q < 1$ ist

$(1-q) \frac{p_1}{f(p_1)}\, u_2(c_1, o) = \infty$, während die u_1 - Terme beschränkt bleiben. Gilt $u_1(o, d_1) = \infty$ und $u_2(d_2, o) = \infty$ so sind also $\mu_i = o$, [G] geht über in

$$q[u_1(c_1, A) - \frac{p_1}{f(p_1)} u_2(c_1, A)] + (1-q)[u_1(c_1, B) - \frac{p_1}{f(p_1)} u_2(c_1, B)] = c$$

Nehmen wir als zweite Gleichung die Budgetgleichung $p_1 c_1 + m_1 - w_1\bar{l} - m_o$ hinzu, so sieht man durch Anwendung des impliziten Funktionentheorems sofort, daß c_1 und m_1 überall bzgl. p_1 und w_1 differenzierbar sind, aber auch bzgl. q und m_o.

Es gilt

$$c_1 = c_1(p_1, w_1, m_o, q, \bar{l}, f, g)$$
$$m_1 = m_1(p_1, w_1, m_o, q, \bar{l}, f, g)$$

Bemerkung:
Bei Unsicherheit $(q < 1)$ und unendlichem Grenznutzen $u_2(c, o)$ werden also immer positive Geldbestände gehalten. Wie wir noch an Beispielen sehen werden, kann die Geldhaltung o sein, wenn Sicherheit über die morgige Beschäftigung besteht. Doch auch die zweite Annahme ist notwendig: Ist

$u(c_1, c_2) = v(c_1) + \frac{1}{2} v(c_2)$ mit $v(c) = \ln(c + 1)$, also $v'(o) = 1$ und p hinreichend groß im Vergleich zu m_o und w, so kann auch bei $q < 1$ $m_1 = o$ eintreten - wenn etwa $f(p_1)$ passend gewählt ist.

Im weiteren sollen die Geldhaltungs- und Konsumentscheidungen der Konsumenten näher untersucht werden. Da sich bei allgemein gewählter, konkaver Nutzenfunktion nicht immer eindeutige Aussagen machen lassen, werden wir uns zum Teil auf Funktionen mit speziellen Eigenschaften beschränken.

Von Arrow [1] und Pratt [23] wurden für Funktionen $u(y)$ die folgenden Risikoaversionsmaße eingeführt:

$$R_A^1(y) := \frac{-u''(y)}{u'(y)} \qquad \text{(absolute Risikoaversion)}$$

$$R_R^1(y) := \frac{-y\,u''(y)}{u'(y)} \qquad \text{(relative Risikoaversion)}$$

Von Sandmo [25, 26] wurden sie auf 2 - Perioden Nutzenfunktionen $u(y_1, y_2)$ verallgemeinert:

$$R_A^2(y_1, y_2) := \frac{-u_{22}(y_1, y_2)}{u_2(y_1, y_2)}$$

$$R_R^2(y_1, y_2) := \frac{-u_{22}(y_1, y_2)y_2}{u_2(y_1, y_2)}$$

Beide Maße sind im allgemeinen Funktionen von y_1, y_2, können aber natürlich auch konstant sein. Pratt [23] hat gezeigt, daß die Klasse der Nutzenfunktionen mit $R_R^1(y)$ = konstant genau die wichtigen Funktionen $u(y) = \log y$

$u(y) = \frac{1}{\gamma} y^\gamma \qquad \gamma \in (-\infty, 1) - \{0\}$ enthält.

Nun haben wir bisher nur Nutzenfunktionen betrachtet, die auf $\mathbb{R}_+^2$ stetig sind. Man kann jedoch zeigen, daß auch Funktionen vorstehenden Typs (also $u(y) = \log y$, $u(y) = \frac{1}{\gamma} y^\gamma$ mit $\gamma < 0$) ein eindeutiges Maximum (c_1, m_1) besitzen, das auch in (p_1, w_1) stetig und differenzierbar ist.

Komparative Statik

Wir haben schon gesehen, daß $c_1 = c_1(p_1, w_1, m_o, q)$ und $m_1 = m_1(p_1, w_1, m_o, q)$ stetig und bei geeigneten Voraussetzungen $(u_1(o, c) = u_2(d, o) = \infty, m_o > 0, q < 1)$ auch differenzierbar sind. Dies werde im weiteren angenommen. Wir wollen also jetzt die Auswirkungen von Parameterveränderungen auf Konsum und Geldhaltung betrachten.

Sei $\eta := \frac{df}{dp_1} \frac{p_1}{f(p_1)}$ die Elastizität der Preiserwartung bzgl. des heutigen Preises. Dann gilt

Lemma 2

Der Konsument sei vom C-1 Typ

Sei für a) - e) $q < 1$, $m_o > 0$, $u_1(0,c) = u_2(d,0) = \infty$. Dann gilt:

a) $\frac{dg_1}{dw_1} \geq o \Rightarrow \frac{\partial c_1}{\partial w_1} > o$

$1 \geq \eta \geq o \Rightarrow \frac{\partial c_1}{\partial p_1} < o$

Ist g monoton wachsend, so wird bei steigendem Lohn also mehr konsumiert; mit steigendem Preis fällt der Konsum hingegen, wenn die Preiselastizität der Preiserwartungsfunktion f durch 1 nach oben beschränkt ist. Wie man sieht, sind auch Erwartungen zugelassen, die von (p_1, w_1) unabhängig sind !

b) Sei u additiv, also $u(c_1, c_2) = v(c_1) + \alpha v(c_2)$ mit konstanter relativer Risikoaversion r.

Dann gilt:

$$\frac{\partial m_1}{\partial p_1} = 0 \qquad \text{wenn} \quad r = 1 \quad \text{oder} \quad \eta = 1$$

$$\frac{\partial m_1}{\partial p_1} > 0 \qquad \text{wenn} \quad (r,\eta) << (1,1) \quad \text{oder} \quad (r,\eta) >> 1$$

$$\frac{\partial m_1}{\partial p_1} < 0 \qquad \text{sonst}$$

c) Ist $q = o$ und $\frac{dg}{dw_1} > o \Rightarrow \frac{\partial m_1}{\partial w_1} > o$

d) $o < \frac{\partial m_1}{\partial m_o} < 1$,

e) $\frac{\partial m_1}{\partial q} < o$, $\frac{\partial c_1}{\partial q} > o$,

bei wachsender Aussicht auf Beschäftigung wird also weniger Geld gehalten und mehr konsumiert.

f) Ist $q = 1$, das Individuum also sicher auch morgen beschäftigt, gelten a), b), d) in allen Punkten, in denen c_1 und m_1 differenzierbar sind.

Bemerkung:

Wie man aus b) ersieht, ist im Gegensatz zum Konsum die komparative Statik bzgl. (p_1, w_1) bei der Geldhaltung nicht mehr eindeutig. In der Klasse der Nutzenfunktion mit R_R^1 = konstant haben Preisveränderungen keine Auswirkungen, wenn $v(c) = \log c$ gilt, oder die Preiserwartungen die Gestalt haben $f(p) = ap$, $a \in \mathbb{R}_+$

Aus Gründen, die im weiteren noch klarer werden, wollen wir solche Preiserwartungen "statisch" oder einfach "linear" nennen. Bei beliebigen Nutzenfunktionen hängt $\operatorname{sign}\left(\frac{\partial m_1}{\partial p_1}\right)$ neben $f(p)$ und $g(w)$ sehr stark von der Erstgeldausstattung m_o ab; man kann etwa zeigen, daß für beschränktes, additives u gilt: $\frac{\partial m_1}{\partial p_1} > o$, wenn m_o klein, und $\frac{\partial m_1}{\partial p_1} < o$ wenn m_o hinreichend groß ist.

Über $\frac{\partial m_1}{\partial w_1}$ läßt sich außer dem unter c) angegebenen Spezialfall keine Aussage machen, hier gehen neben m_o verstärkt f, g und q ein.

Daß es notwendig ist, in a) die Preiselastizität η zu beschränken, zeigt das folgende Gegenbeispiel :

(siehe auch Bsp. 1)

Sei $u(c_1, c_2) = \sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}$, $q = 1$, $g(w_1)$ beliebig,

$f(p_1) = p_1^{\alpha}$ $\alpha > 2$. Dann ist für m_o hinreichend groß und $p_1 < \left(\frac{w_1 \bar{l} + m_o}{g(w_1)\ \bar{l}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

$$c_1 = \frac{f(p_1)\ F(w_1, m_o)}{p_1 (f(p_1) + p_1)}$$

F ist dabei eine Funktion, die nicht von p_1 abhängt.

Für $p_1 < (\alpha-2)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ ist dann $\frac{\partial c_1}{\partial p_1} > o$

also etwa für $f(p_1) = p_1^3$: $\frac{\partial c_1}{\partial p_1} > o$ für $p_1 \in (o, 1)$

Da nicht abdiskontiert wird, das morgige Einkommen sicher ist und bei $p_1 < 1$, aber p_1 wachsend, $f(p_1)$ sehr viel kleiner als der heutige Preis wird, lohnt es sich in dem Bereich $(o, 1)$ heute mehr zu konsumieren.

Beweis:

Aufgrund der gemachten Voraussetzungen sind c_1 , m_1 differenzierbar und beide positiv , wir setzen nun :

$$F_1(c_1, m_1, p_1, w_1, m_o) := q\, u_1(c_1, A) - \frac{qp_1}{f(p_1)}\, u_2(c_1, A)$$

$$+ (1-q)\, u_1(c_1, B) - (1-q)\, \frac{p_1}{f(p_1)}\, u_2(c_1, B) = o$$

$$F_2(c_1, m_1, p_1, w_1, m_o) := p_1 c_1 + m_1 - w_1 \bar{l}_1 - m_o = o$$

Wir berechnen die Funktionaldeterminante:

$$\frac{\partial F_1}{\partial m_1} = q\, u_{12}(c_1, A)\, \frac{1}{f(p_1)} - \frac{qp_1}{f^2(p_1)}\, u_{22}(c_1, A) + \frac{(1-q)}{f(p_1)}\, u_{12}(c_1,$$

$$- \frac{(1-q)p_1}{f^2(p_1)}\, u_{22}(c_1, B) > o$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial m_1} = 1$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial c_1} = q\, u_{11}(c_1, A) - \frac{qp_1}{f(p_1)}\, u_{21}(c_1, A) + (1-q)\, u_{11}(c_1, B)$$

$$- \frac{(1-q)p_1}{f(p_1)}\, u_{21}(c_1, B) < o$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial c_1} = p_1$$

$$D(m_1, c_1) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial m_1} & \frac{\partial F_1}{\partial c_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial m_1} & \frac{\partial F_2}{\partial c_1} \end{vmatrix} =$$

$$2qu_{12}(c_1, A)\frac{p_1}{f(p_1)} + 2(1-q)u_{12}(c_1, B)\frac{p_1}{f(p_1)} - q(\frac{p_1}{f(p_1)})^2 u_{22}(c_1, A)$$

$$- (1-q)(\frac{p_1}{f(p_1)})^2 u_{22}(c_1, B) - qu_{11}(c_1, A) - (1-q)u_{11}(c_1, B) > o$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial w_1} = qu_{12}(c_1, A)\frac{g'(w_1)\bar{I}}{f(p_1)} - q\frac{p_1}{f(p_1)} \cdot u_{22}(c_1, A)\frac{g'(w_1)\bar{I}}{f(p_1)}$$

$$= \frac{q\bar{I}}{f(p_1)} g'(w_1) \left(u_{12}(c_1, A) - \frac{p_1}{f(p_1)} u_{22}(c_1, A)\right) \geq o$$

wenn $g' \geq o$.

$$\frac{\partial F_1}{\partial p_1} = q\frac{f'(p_1)}{f(p)} \cdot A \cdot [-u_{12}(c_1, A) + u_{22}(c_1, A)\frac{p_1}{f(p_1)}]$$

$$+ (1-q)\frac{f'(p_1)}{f(p_1)} \cdot B \cdot [-u_{12}(c_1, B) + u_{22}(c_1, B)\frac{p_1}{f(p_1)}]$$

$$- \left(\frac{f(p_1) - f'(p_1)p_1}{f^2(p_1)}\right) [q\, u_2(c_1, A) + (1-q)u_2\,(c_1, B)] < o$$

wenn $f' > o$ und $f(p_1) \geq f'(p_1)p_1$, also

$$1 \geq \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{p_1}{f(p_1)} \geq o$$

Sind die Erwartungsfunktionen von p_1 und w_1 unabhängig, so gilt:

$$\frac{\partial F_1}{\partial w_1} = o$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial p_1} = -\frac{1}{p_2}\left[q\, u_2(c_1, A) + (1-q)u_2(c_1, B)\right] < o$$

Damit erhält man in jedem Fall:

$$\frac{\partial c_1}{\partial w_1} = -\frac{1}{D(c_1, m_1)}\left(\frac{\partial F_2}{\partial m_1}\frac{\partial F_1}{\partial w_1} - \frac{\partial F_1}{\partial m_1}\frac{\partial F_2}{\partial w_1}\right) =$$

$$-\frac{1}{D}\left(1\cdot \overbrace{\frac{\partial F_1}{\partial w_1}}^{\geq o} - \overbrace{\frac{\partial F_1}{\partial m_1}}^{>o}\,(-\bar{1})\right) > o$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial p_1} = -\frac{1}{D}\left(\frac{\partial F_2}{\partial m_1}\frac{\partial F_1}{\partial p_1} - \frac{\partial F_1}{\partial m_1}\frac{\partial F_2}{\partial p_1}\right)$$

$$= -\frac{1}{D}\left(1\cdot \underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial p_1}}_{<o} - \underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial m_1}}_{>o} c_1\right) < o$$

b) $$\frac{\partial m_1}{\partial p_1} = -\frac{1}{D(m_1, c_1)}\left(\frac{\partial F_2}{\partial c_1}\frac{\partial F_1}{\partial p_1} - \frac{\partial F_1}{\partial c_1}\frac{\partial F_2}{\partial p_1}\right)$$

$$= -\frac{1}{D}\left(p_1 \underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial p_1}}_{<o} - \underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial c_1}}_{<o} c_1\right)$$

Das Vorzeichen ist nicht eindeutig, um noch positive Ergebnisse zu erhalten, schränken wir auf additive Nutzenfunktionen $u(c_1, c_2) = v(c_1) + \alpha v(c_2)$ mit konstanter relativer Risikoaver-

sion r ein. Diese Klasse wurde neben Pratt [23] von Hakansson [16] näher untersucht. Es gilt dann :

$$\frac{\partial m_1}{\partial p_1} = + \frac{1}{D} \left(\nu' (c_1) (1 - \frac{df}{dp_1} \frac{p_1}{f(p_1)} - r \right) + \frac{\alpha r p_1}{f(p_1)} \frac{df}{dp_1} \cdot$$

$$\left(\frac{q p_1}{f(p_1)} \nu'(A) + \frac{(1-q) p_1}{f(p_1)} \nu'(B) \right) = \frac{+ \nu'(c_1)}{D} \cdot (1 - \eta) (1 - r)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial m_1}{\partial p_1} = o \quad \Leftrightarrow \quad r = 1 \quad \text{oder} \quad \eta = 1$$

$$> 0 \quad \Leftrightarrow \quad (r,\eta) >> (1,1) \quad \text{oder} \quad (r,\eta) << (1,1)$$

$$< 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{sonst.}$$

gilt: $\frac{\partial m_1}{\partial p_1} = o$, so erhält man mithilfe der Budgetgleichung

$\left| \frac{\partial c_1}{\partial p_1} \frac{p_1}{c_1} \right| = 1$, die Preiselastizität der Nachfrage ist also

- absolut gesehen - Eins bei $\nu = \log$ oder rationalen Erwartungen, ihre Größe hängt sonst stark von der Erwartungsbildung ab. Beschränken wir uns auf Preisfunktionen mit $\eta \leq 1$, so gilt demnach:

$\nu(c) = \log c$ $\qquad\qquad$ $\frac{\partial m_1}{\partial p_1} = o$

$\nu(c) = - c^{\gamma} \quad \gamma \in]- \infty, o[$ $\qquad\qquad$ $\frac{\partial m_1}{\partial p_1} < o$

$\nu(c) = c^{\gamma}$ $\quad \gamma \in]o, 1[$ $\qquad \frac{\partial m_1}{\partial p_1} > o$

c) Da $q = o$ ist, gilt

$\frac{\partial m_1}{\partial w_1} = - \frac{1}{D} \left(- \frac{\partial F_1}{\partial c_1} (-\bar{1}) \right) > o$, bei wachsendem Lohn und sicherer Arbeitslosigkeit wird also mehr Geld gehalten.

d) $\frac{\partial m_1}{\partial m_o} = - \frac{1}{D} \left(- \frac{\partial F_1}{\partial c_1} \frac{\partial F_2}{\partial m_o} \right) = - \frac{\frac{\partial F_1}{\partial c_1}}{\frac{\partial F_1}{\partial m_1} p_1 - \frac{\partial F_1}{\partial c_1}}$

$\in (o, 1)$, da $\frac{\partial F_1}{\partial c_1} < o$, $\frac{\partial F_1}{\partial m_1} > o$ ist. Analog erhält man $\frac{\partial c_1}{\partial m_o} > o$

e) $\frac{\partial F_1}{\partial q} = u_1(c_1, A) - \frac{p_1}{f(p_1)} u_2(c_1, A) - u_1(c_1, B) + \frac{p_1}{f(p_1)} u_2(c_1, B)$

$= u_1(c_1, A) - u_1(c_1, B) + \frac{p_1}{f(p_1)} (u_2(c_1, B) - u_2(c_1, A)) > o$

da $A > B$ und $u_{12} \geq o$

$\frac{\partial m_1}{\partial q} = - \frac{1}{D(m_1, c_1)} \left(\frac{\partial F_2}{\partial c_1} \frac{\partial F_1}{\partial q} - \frac{\partial F_1}{\partial c_1} \underbrace{\frac{\partial F_2}{\partial q}}_{o} \right) = \frac{-p_1}{D} \frac{\partial F_1}{\partial q} < o$

analog $\frac{\partial c_1}{\partial q} = \frac{-1}{D(c_1, m_1)} \left(\frac{\partial F_2}{\partial m_1} \frac{\partial F_1}{\partial q} \right) > o$

Ist $m_1 > o$, so gilt auch bei $q = 1$ das Ergebnis von a, b, d)

ist $m_1 = o$, also $c_1 = \frac{w_1 \bar{l} + m_o}{p_1}$, so erhält man, wenn m_1 und c_1 in den entsprechenden Punkten differenzierbar sind:

$$\frac{\partial c_1}{\partial p_1} = - \frac{w_1 l + m_o}{p_1^2} < o \,, \quad \frac{\partial c_1}{\partial w_1} = \frac{\bar{l}}{p_1} > o$$

$$\frac{\partial m_1}{\partial p_1} = o \,, \quad \frac{\partial m_1}{\partial w_1} = o$$

Auswirkungen von Erwartungsveränderungen auf die Geldhaltung.

Wir wollen im weiteren untersuchen, wie sich Konsum und Geldhaltung verändern, wenn der Konsument seine Erwartungen verändert. Wir beschränken uns dabei auf statische Erwartungen, also $f(p) = ap$, $g(w) = bw$, $a, b > o$. Dann gilt

Lemma 3

a) $\frac{\partial m_1}{\partial b} < o$, $\frac{\partial c_1}{\partial b} > o$, bei positiverer Lohnerwartung fällt also die Geldhaltung, während der Konsum wächst.

b) Sei u additiv, mit konstanter relativer Risikoaversion r . Dann gilt:

$\frac{\partial m_1}{\partial a} = \frac{\partial c_1}{\partial a} = o$	wenn	$r = 1$	$(v(c) = \log c)$
$\frac{\partial m_1}{\partial a} < o$, $\frac{\partial c_1}{\partial a} > o$		$r < 1$	$(v(c) = c^\gamma, \gamma \in (o, 1)$
$\frac{\partial m_1}{\partial a} > o$, $\frac{\partial c_1}{\partial a} < o$		$r > 1$	$(v(c) = -c^\gamma, \gamma < o)$

Der Effekt ist in diesem Fall also nicht eindeutig

Beweis:

a) Nochmalige Anwendung des impliziten Funktionentheorems liefert

$$\frac{\partial m_1}{\partial b} = - \frac{1}{D(m_1, c_1)} \left(\frac{\partial F_2}{\partial c_1} \frac{\partial F_1}{\partial b} - \frac{\partial F_1}{\partial c_1} \underbrace{\frac{\partial F_2}{\partial b}}_{0} \right) =$$

$$- \frac{p_1}{D} \left(q\, u_{12}(c_1, A) \frac{w_1 \bar{I}}{f(p_1)} - q \frac{p_1}{f(p_1)} u_{22}(c_1, A) \frac{w_1 \bar{I}}{f(p_1)} \right) < 0$$

b) $$\frac{\partial m_1}{\partial a} = - \frac{1}{D} \left(p_1 \frac{\partial F_1}{\partial a} \right) = - \frac{p_1}{D} \left(\frac{q\alpha}{a^2} \nu'(A) \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha(1-q)}{a^2} \nu'(B) + \frac{\alpha q}{a^2} \nu''(A)A + \frac{\alpha(1-q)}{a^2} \nu''(B)B \right)$$

$$= - \frac{p_1 \cdot \alpha}{D \cdot a^2} \left(q\, \nu'(A)(1-r) + (1-q)\nu'(B)(1-r) \right)$$

Daraus erhält man sofort die Behauptung für m_1 ;

für c_1 analog.

Geldillusion, Real- balance- Effekt

Unabhängig vom Vorausgehenden ist es von Interesse, ob das Individuum der Geldillusion unterliegt. Geldtheoretiker nehmen nämlich oftmals an, [siehe Grandmont [11] oder Samuelson [24]] daß nur Realgeldbestände in die Nutzenfunktion (hier: die indirekte Nutzenfunktion) eingehen. Allgemein besagt diese Theorie dann, daß ein Individuum dann frei von Geldillusion ist, wenn seine Nutzenfunktion homogen vom Grade o in den jetzigen Preisen und den Nominalgeldbeständen ist, d.h. also, wenn gilt:

(N) $V(c_1, \lambda m_1, \lambda p_1, \lambda w_1) = V(c_1, m_1, p_1, w_1)$ für alle $\lambda > o$, und alle $(c_1, m_1, p_1, w_1) \geq O$, $(p_1, w_1) >> O$.

Diese Eigenschaft wird natürlich nicht immer erfüllt sein, sondern sehr stark von den Erwartungen abhängen. Es gilt dazu folgender Satz, dessen hinreichende Bedingung von Grandmont (siehe dazu [11]) unter allgemeinen Voraussetzungen bewiesen worden ist :

Satz 2 :

Sei u eine stetige, nach unten beschränkte, streng monoton wachsende Nutzenfunktion. Für die Erwartungen f und g gelte :

$$(f,g) \in \quad := \{(f_1,f_2) \mid f_i : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}_+ \text{ , } f_i \text{ stetig ,}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_{++} : f_1(x) > O \ \wedge \ \exists y \in \mathbb{R}_{++} : f_2(y) > O \}$$

Weiter sei $q \neq O$. Bezüglich $\mathfrak{F}$ gilt dann :

Der Konsument unterliegt genau dann keiner Geldillusion, wenn f und g linear homogen sind.

Beweis :

Sei (c_1, m_1, p_1) beliebig, w_1 so, daß $g(w_1) > 0$ ist, $m_1 > 0$.

Nun gilt für alle $\lambda > 0$:

$$V(c_1, \lambda m_1, \lambda p_1, \lambda w_1) = V(c_1, m_1, p_1, w_1)$$

Das ist äquivalent zu : Für alle $\lambda > 0$ gilt :

$$(*) \quad q\, u\left(c_1, \frac{\lambda m_1 + g(\lambda w_1)\bar{1}}{f(\lambda p_1)}\right) + (1-q)\, u\left(c_1, \frac{\lambda m_1}{f(\lambda p_1)}\right) =$$

$$q\, u\left(c_1, \frac{m_1 + g(w_1)\bar{1}}{f(p_1)}\right) + (1-q)\, u\left(c_1, \frac{m_1}{f(p_1)}\right)$$

Nun gilt :

$f(p_1) = ap_1$, $g(w_1) = bw_1$ erfüllen (*) , $a, b > 0$.

Annahme : $\exists\, \lambda_o, \lambda_o > 0$: $\lambda_o f(p_1) \neq f(\lambda_o p_1)$

$$\Rightarrow \quad \frac{\lambda_o}{f(\lambda_o p_1)} \neq \frac{1}{f(p_1)} \qquad \text{o.B.d.A.} \quad \frac{\lambda_o}{f(\lambda_o p_1)} > \frac{1}{f(p_1)}$$

Nun bleibt die rechte Seite von (*) konstant, damit muß - für $\lambda = \lambda_o$ - dasselbe für die linke Seite gelten, also muß wegen der strengen Monotonie von u $\dfrac{g(\lambda_o w_1)}{f(\lambda_o p_1)} < \dfrac{g(w_1)}{f(p_1)}$ sein .

Setzt man aber in (*) $m_1 = 0$, so ergibt sich für $\lambda > 0$

$$(\overset{+}{*}) \quad \frac{g(\lambda w_1)}{f(\lambda p_1)} = \frac{g(w_1)}{f(p_1)} > 0 \qquad \# \text{ damit gilt immer}$$

$f(\lambda p_1) = \lambda f(p_1)$, mithin ist f linear, aus $(\overset{+}{*})$ ergibt sich, daß g auf $\mathbb{R}_{++}$ strikt positiv ist und auch linear .

Rückrichtung :

Seien f, g homogen vom Grade 1 :

$$V(c_1, \lambda m_1, \lambda p_1, \lambda w_1) = q\, u\left(c_1, \frac{\lambda m_1 + \lambda g(w_1)\bar{I}}{\lambda f(p_1)}\right)$$

$$+ (1-q)\, u\left(c_1, \frac{\lambda m_1}{\lambda f(p_1)}\right) = V(c_1, m_1, p_1, w_1)$$

Bemerkung :
Der Satz läßt sich abschwächen auf Nutzenfunktionen, die auf Nullmengen nicht strikt monoton sind (wie $u(c_1,c_2) = \sqrt{c_1 \cdot c_2}$) .

Wir wollen im weiteren untersuchen, welche Auswirkungen proportionale Preis- und Lohnveränderungen auf die Nachfrage haben. Da die relativen Preise dadurch unverändert bleiben, entsteht hierdurch kein Substitutions-, sondern ein reiner "Reichtums"-Effekt, indem nämlich der Wert der ursprünglichen Kassenhaltung verändert wird. Damit gilt

Satz 3:

Der Konsument sei vom C1-Typ und seine Erwartungsfunktionen seien homogen vom Grade 1 (statische Erwartung). Dann gilt für $c_1 > 0$:

$$c_1(\lambda p_1, \lambda w_1) < c_1(p_1, w_1) , \qquad \lambda > 1 ,$$

$$\frac{m_1(\lambda p_1, \lambda w_1)}{\lambda p_1} < \frac{m_1(p_1, w_1)}{p_1} \qquad \lambda > 1 , \quad \text{wenn} \quad m_1 > 0$$

Konsum und Realgeldbestände sinken damit bei proportional wachsendem Preis und Lohn

Beweis:

Ist $m_1 = o$, so gilt $c_1 = \dfrac{w_1\bar{l} + m_o}{p_1}$, also

$$c_1(\lambda) = \frac{w_1\bar{l} \cdot \lambda + m_o}{\lambda p_1} < c_1(\cdot) \text{ , wir nehmen daher } m_1 > o \text{ an.}$$

Indem wir die Budgetgleichung benutzen und $f(p) = ap$, $g(w) = bw$ einsetzen, geht Gleichung [G] über in :

$$\tilde{F}_1(c_1,p_1,w_1,m_o) = q[u_1(c_1, K_1\frac{w_1}{p_1} + K_2\frac{m_o}{p_1} - K_2 c_1)$$

$$- K_2 u_2(c_1, K_1\frac{w_1}{p_1} + K_2\frac{m_o}{p_1} - K_2 c_1)] + (1-q)[u_1(c_1, K_3\frac{w_1}{p_1} + K_2\frac{m_o}{p_1} - K_2 c_1)$$

$$- K_2 u_2(c_1, K_3\frac{w_1}{p_1} + K_2\frac{m_o}{p_1} - K_2 c_1)] = \tilde{F}_1(c_1, \frac{w_1}{p_1}, \frac{m_o}{p_1})$$

mit $K_1 = \dfrac{\bar{l}(1+b)}{a}$, $K_2 = \dfrac{1}{a}$, $K_3 = \dfrac{\bar{l}}{a}$

Damit ist

$$c_1(p_1, w_1, m_o) =: \tilde{\tilde{F}}(\frac{w_1}{p_1}, \frac{m_o}{p_1}) \text{ , und damit dann auch}$$

$$\frac{m_1(p_1, w_1, m_o)}{p_1} = \tilde{\tilde{G}}(\frac{w_1}{p_1}, \frac{m_o}{p_1})$$

Das läßt sich auch sofort aus Satz 2 ablesen, wenn dort u zusätzlich als strikt konkav angenommen wird :

Seien $(p_1, w_1, m_o) >> 0$, $\lambda > 0$ fix. Wir betrachten die beiden Maximierungsprobleme :

1) $\max_{(c_1,m_1)} v(c_1,m_1,p_1,w_1)$ unter der Nebenbedingung : $p_1c_1+m_1 = w_1\bar{1}+m_o$

2) $\max_{(x,y)} v(x,y,\lambda p_1,\lambda w_1)$ unter $\lambda p_1 x + y = \lambda w_1\bar{1} + \lambda m_o$

Nun existiert jeweils eine eindeutige Lösung

$L_1(p_1, w_1, m_o) := (c_1^*, m_1^*)$; $L_2(\lambda p_1, \lambda w_1, \lambda m_o) := (x^*, y^*)$.

Er ist $v(x,y,\lambda p_1, \lambda w_1) = v(x, \frac{y}{\lambda}, p_1, w_1)$. Werden beide Funktionen in der x-y-Ebene über demselben Bereich maximiert so gilt dann auch, daß sie im jeweiligen Maximum übereinstimmen. Nun ist aber

$\max v(x, \frac{y}{\lambda}, p_1, w_1)$ unter $\lambda p_1 x + \lambda(\frac{y}{\lambda}) = \lambda(w_1\bar{1} + m_o)$

genau das unter 1) definierte Problem.

Wegen der Eindeutigkeit gilt damit

$$c_1^* = c_1^*(p_1,w_1,m_o) = x^*(\lambda p_1,\lambda w_1,\lambda m_o) = x^*$$

$$m_1^* = m_1^*(p_1,w_1,m_o) = \frac{y^*(\lambda p_1,\lambda w_1,\lambda m_o)}{\lambda}$$

Aus der Budgetgleichung erhalten wir dann $(\lambda > 1)$

$$c_1(\lambda p_1, \lambda w_1, m_o) + \frac{m_1(\lambda p_1, \lambda w_1, m_o)}{\lambda p_1} = \frac{\lambda w_1 \bar{l} + m_o}{\lambda p_1} < \frac{w_1 \bar{l} + m_o}{p_1}$$

Konsum und Realgeldbestand zusammen nehmen mithin ab.

Nun gilt aber $c_1(\lambda p_1, \lambda w_1, m_o) = \tilde{\tilde{F}}\left(\frac{\lambda p_1}{\lambda w_1}, \frac{m_o}{\lambda p_1}\right) = c_1\left(p_1, w_1, \frac{m_o}{\lambda}\right)$

In Lemma 2 haben wir schon

$\frac{\partial c_1}{\partial m_o} > o$ berechnet, also gilt $c_1(\lambda p_1, \lambda w_1, m_o)$

$= c_1\left(p_1, w_1, \frac{m_o}{\lambda}\right) < c_1(p_1, w_1, m_o)$, der Konsum nimmt mithin ab.

Wegen $\frac{\partial m_1}{\partial m_o} > o$ und $\frac{m_1(\lambda p_1, \lambda w_1, m_o)}{\lambda p_1} = \frac{m_1\left(p_1, w_1, \frac{m_o}{\lambda}\right)}{p_1}$

$< \frac{m_1(p_1, w_1, m_o)}{p_1}$ sinken mithin auch die Realgeldbestände.

Daß die obige Behauptung sehr stark von den Erwartungen abhängt, zeigt das folgende Gegenbeispiel 1:

Sei u additiv, $u(c_1, c_2) = v(c_1) + \alpha v(c_2)$, $v(c) = c^\gamma$

$\gamma \in (o, 1)$, $f(p_1) = ap_1$, $g(w_1) = w_1^{\alpha_1}$, $a, \alpha, \alpha_1 > o$.

Das Individuum sei sicher, heute wie morgen beschäftigt zu sein.

Setzt man $\beta := \alpha^{\frac{1}{\gamma-1}}$, $\delta := \frac{\gamma}{\gamma-1}$ und $A := \frac{p_1}{f(p_1)} = \frac{1}{a}$,

so gilt:

$$m_1 = \begin{cases} \dfrac{w_1\bar{l} + m_o - \beta A^{\delta} w_1^{\alpha_1} \bar{l}}{\beta A^{\delta} + 1} & w_1\bar{l} + m_o > \beta A^{\delta} w_1^{\alpha_1} \bar{l} \\ o & \text{sonst} \end{cases}$$

$$c_1 = \begin{cases} \beta A^{\delta}(w_1\bar{l} + m_o + w_1^{\alpha_1} \bar{l}) / p_1(1 + \beta A^{\delta}) & w_1\bar{l} + m_o > \beta A^{\delta} w_1^{\alpha_1} \bar{l} \\ (w_1\bar{l} + m_o)/ p_1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei $\alpha_1 = 2$ (das folgende Ergebnis ist auch möglich für jedes $\alpha_1 > 1$)

Seien nun p_1, w_1 fest. Indem man m_o geeignet groß wählt, läßt sich erreichen, daß $m_1 > o$ und $\frac{m_o}{w_1^2\bar{l}} >> 1$ gilt.

Durch einfaches Ausrechnen bestätigt man, daß

$$c(\lambda p_1, \lambda w_1) < c(p_1, w_1) \Leftrightarrow \lambda < \frac{m_o}{w_1^2\bar{l}}, \quad \lambda > 1$$

Setzt man nun $\lambda_o := \frac{m_o}{w_1^2\bar{l}}$, so ist $\lambda > 1$ und

$c(\lambda_o p_1, \lambda_o w_1) = c(p_1, w_1)$, sowie $m_1(\lambda_o p_1, \lambda_o w_1) > o$

indem man A klein genug macht.

Wegen der überproportional wachsenden Lohnerwartung nimmt der Konsum bei proportional wachsendem p_1 und w_1 zwar erst ab, nimmt aber dann in einem bestimmten Bereich wieder zu.
Doch auch bei Erwartungsfunktionen mit Elastizitäten $\eta \leq 1$ erhält man für bestimmte $\lambda > 1$:
$c(\lambda p_1, \lambda w_1) > c(p_1, w_1)$.

Beispiel 2:

Man wählt wieder eine additive Nutzenfunktion $u = v + \alpha v$ mit
$v(c) = -c^{-1}$, $f(p) = p^{\upsilon}$ $o < \upsilon < 1$, $g(w) = \delta w$, $\alpha, \delta > 0$

Das Individuum sei heute wie morgen wieder sicher beschäftigt.
Dann gilt
(mit $\tilde{B} := 1 + \delta$ und $\beta := \alpha^{-\frac{1}{2}}$)

$$c_1 = \frac{\beta(m_o + w_1 \bar{l} \tilde{B})}{p_1^{\frac{1+\upsilon}{2}} + \beta p_1} \qquad \text{wenn} \quad w_1 \bar{l} + m_o > \beta\delta\, w_1 \bar{l}\, p_1^{\frac{1-\upsilon}{2}}$$

Dann läßt sich wieder zeigen, durch ähnliche Betrachtung wie in Beispiel 1 , daß man für alle υ , $\upsilon \in (0,1)$ p_1 und w_1 finden kann, sodaß $c(\lambda p_1, \lambda w_1) > c(p_1, w_1)$ für bestimmte $\lambda > 1$.

Wir wollen im weiteren noch das Verhalten von c_1 und m_1 in bestimmten Situationen untersuchen.

Lemma 4

a) Sei $m_o > o$ und

1) $f(0) = \sigma > o$ oder, wenn $f(o) = o$:

2) $\lim_{p \to o} f'(p) = \tau > o$ und $u_2(c, \infty) = o \qquad \forall\, c \geq o$

Sei (p_1^n, w_1^n) eine Folge mit $p_1^n \to 0$.

Dann gilt : $\lim_{n \to o} c_1(p_1^n, w_1^n) = \infty$

b) Es gelte $\forall\, c \geq o$: $o = u_2(c, \infty)$, $u_2(d, o) = \infty$, $d > o$

Dann gibt es für alle (p_1, w_1, q) , $(p_1, w_1) >> o$, $q < 1$, ein m_o mit $m_1(p_1, w_1, q, m_o) = m_o$, die Kassenhaltung verändert sich also nicht.

c) Sei $\forall\, c \geq o$: $u_1(\infty, c) = o$. Dann gilt:

$\lim_{m_o \to \infty} m_1(m_o) = \infty \qquad , q \in [\, o, 1\,]$

Beweis:

a) Sei $(p_1^j, w_1^j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit $p_1^j \to o$. O.E. können wir annehmen, daß $w_1^j \to K < \infty$, (der Fall $w_1^j \to \infty$ wird sich an-

schließend sofort ergeben). Nun sei abkürzend $c_1^j := c_1(p_1^j, w_1^j)$, analog m_1^j, A^j, B^j .

Annahme: Die Behauptung ist falsch. Dann gibt es eine konvergente Teilfolge, die wir O wieder mit j indizieren, sodaß

$$\lim_{j\to\infty} c_1^j = K_1 < \infty$$

Aus der Budgetgleichung erhält man dann für $j \geq j_o$, j_o groß:

$m_1^j > o$, $\lim m_1^j = m_o + \lim w_1^j \bar{l} = m_o + K\bar{l}$

Damit gilt die Gleichung [**6**] .

$$q[u_1(c_1^j, A^j) - \frac{p_1^j}{f(p_1^j)} u_2(c_1^j, A^j)] + (1-q)[u_1(c_1^j, B_1^j) - \frac{p_1^j}{f(p_1^j)} u_2(c_1^j, B_1^j)]$$

$$+ \mu_2^j = o$$

Nun seien die beiden Fälle unterschieden:

1) $$\lim_{j\to\infty} A^j = \lim_{j\to\infty} \frac{m_1^j + g(w_1^j)\bar{l}}{f(p_1^j)} = \frac{m_o + K\bar{l} + g(k)\bar{l}}{\sigma} = K_2$$

$$\lim_{j\to\infty} B^j = \frac{m_o + K\bar{l}}{\sigma} = K_3 \qquad o < K_2, K_3 < \infty$$

Damit gilt im Limes, da $u_1 > o$ ist und u_2 beschränkt bleibt:

$o \geq q\, u_1(K_1, K_2) - o + (1-q)\, u_1(K_1, K_3) - o$ ⊨

2) Sei nun $\lim_{j\to\infty} f'(p_1^j) = \tau > o$, $f(o) = o$. Mit der Regel von l'Hospital gilt dann $\lim_j \frac{p_1^j}{f(p_1^j)} = \lim_j \frac{1}{f'(p_1^j)} = \frac{1}{\tau} < \infty$

A^j und B^j wachsen unbeschränkt, indem wir wieder Gleichung [6] benützen, erhalten wir

$\lim_j \frac{p_1^j}{f(p_1^j)} u_2(c_1^j, A^j) = \frac{1}{\tau} u_2(K_1, \infty) = o$, analog für den Fall, in dem A^j durch B^j ersetzt ist. $u_1(c_1^j, A^j)$, bzw. $u_1(c_1^j, B^j)$ konvergieren aber gegen einen positiven Grenzwert oder streben gegen unendlich. ⊨ es gilt also immer:

$\lim_j c_1(p_1^j, w_1^j) = \infty$

Dieses Ergebnis gilt speziell für $w_1^j = w_1 =$ konstant, wegen $\frac{\partial c_1}{\partial w_1} > o$ dann natürlich auch, wenn $w_1^j \to \infty$.

Bemerkung zu a):
Wir werden noch sehen, daß bei beschränktem u die obigen Bedingungen 1) und 2) abschwächbar sind, bei beliebigem u sind sie jedoch notwendig, wie man an folgendem Beispiel sehen kann:

Sei $U(c_1, c_2) = \sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}$

$g(w_1)$ beliebig und $f(p_1) = p_1^4$. Dann ist bei Sicherheit $(q = 1)$ und $w_1\bar{l} + m_o > p_1^3 g(w_1)\bar{l}$:

$c_1 = \frac{[w_1\bar{l} + m_o + g(w_1)\bar{l}]p_1^2}{1 + p_1^3}$, somit $\lim_{p_1 \to o} c_1 = o$ ———

Zu a):
Wegen a2) sind alle Funktionen $f(p_1) = \gamma p_1$, $\gamma > o$

lso speziell Patinkin's statische Erwartung $f(p_1) = p_1$ einge-
chlossen.

) Seien (p_1, w_1, q) fix. Da m_1 in m_o stetig und positiv ist - und zwar wegen $q < 1$ und $u_2(c, o) = \infty$, gibt es ein ganzes Intervall $I = [\, o, \varepsilon \,]$ mit: $m_1(m_o) > m_o$, $m_o \in I$. denn auch für $m_o = 0$ ist $m_1 > 0$, weil w_1 positiv ist.

Annahme : $\forall\ m_o > 0 : m_1(m_o) > m_o$

damit ist dann $c_1 = 0$ oder $\left| \; c_1 = \dfrac{m_o - m_1(m_o) + w_1\bar{I}}{p_1} < \dfrac{w_1\bar{I}}{p_1} \right.$,

also gibt es eine Teilfolge mit

$\lim\limits_{m_o \to \infty} c_1 = K < \infty$ und $\lim\limits_{m_o \to \infty} m_1(m_o) = \infty$, also $\lim A = \lim B = \infty$

Ausnutzen von [G] liefert im Limes

$$o \geq q\, u_1(K, \infty) - \frac{qp_1}{f(p_1)} \underbrace{u_2(K, \infty)}_{o} + (1-q)\, u_1(K, \infty)$$

$$- \frac{(1-q)p_1}{f(p_1)}\, u_2(K, \infty)$$

$$\geq u_1(K, \infty) > o \qquad \boxplus$$

also gibt es ein m_o mit $m_1(m_o) < m_o$, wegen der Stetigkeit gibt es somit nach dem Zwischenwertsatz ein m_o^* mit $m_1(p_1, w_1, m_o^*) = m_o^*$.

) Ann.: $\lim\limits_{m_o \to \infty} m_1(m_o) = K < \infty$; mithilfe der Budgetgleichung erhält man dann $\lim c_1 = \infty$, $\lim A < \infty$, $\lim B < \infty$

Analog zu b) erhält man dann einen Widerspruch mithilfe von Gleichung [G], da $u_1(\infty, c) = o$ und $u_2(\infty, d) > o$ gilt. Der Fall $q = 1$ läßt sich hier mitbehandeln.

Zum Abschluß sei noch an einem Beispiel die Geldhaltung in Abhängigkeit von m_o und w betrachtet. Zum Vergleich ist die Geldhaltung eines Konsumenten, der heute arbeitslos ist, mit eingezeichnet.

Beispiel 3:

Sei $u(c_1, c_2) = \log c_1 + \alpha \log c_2$;

$m_1^{(i,j)}$ bzw. $c_1^{(i,j)}$ sei die Geldhaltung (Konsum), wenn das Individuum heute im Zustand i und morgen im Zustand j ist, dabei sei $i, j \in \{o, 1\}$ und $o \triangleq$ arbeitslos, $1 \triangleq$ beschäftigt.
Es gilt dann:

$$m_1^{(o,o)} = \frac{\alpha}{1+\alpha} m_o \qquad c_1^{(o,o)} = \frac{m_o}{p_1(1+\alpha)}$$

$$m_1^{(o,1)} = \begin{cases} \dfrac{\alpha m_o - g(w_1)\bar{l}}{1+\alpha} \\ o \end{cases} \qquad c_1^{(o,1)} = \begin{cases} \dfrac{m_o + g(w_1)\bar{l}}{(1+\alpha)p_1} & m_o \geq \dfrac{g(w_1)\bar{l}}{\alpha} \\ \dfrac{m_o}{p_1} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$m_1^{(1,o)} = \frac{\alpha}{1+\alpha}(m_o + w_1\bar{l}) \qquad c_1^{(1,o)} = \frac{m_o + w_1\bar{l}}{(1+\alpha)p_1}$$

$$m_1^{(1,1)} = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{1+\alpha}(m_o + w_1\bar{l}) - \dfrac{g(w_1)\bar{l}}{1+\alpha} & g(w_1) - \alpha w_1 < \dfrac{\alpha m_o}{\bar{l}} \\ o & \text{sonst} \end{cases}$$

$$c_1^{(1,1)} = \begin{cases} \dfrac{m_o + w_1\bar{l} + g(w_1)\bar{l}}{(1+\alpha)p_1} & g(w_1) - \alpha w_1 < \dfrac{\alpha m_o}{\bar{l}} \\ \dfrac{m_o + w_1\bar{l}}{p_1} & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist $q \in (o, 1)$, so erhält man

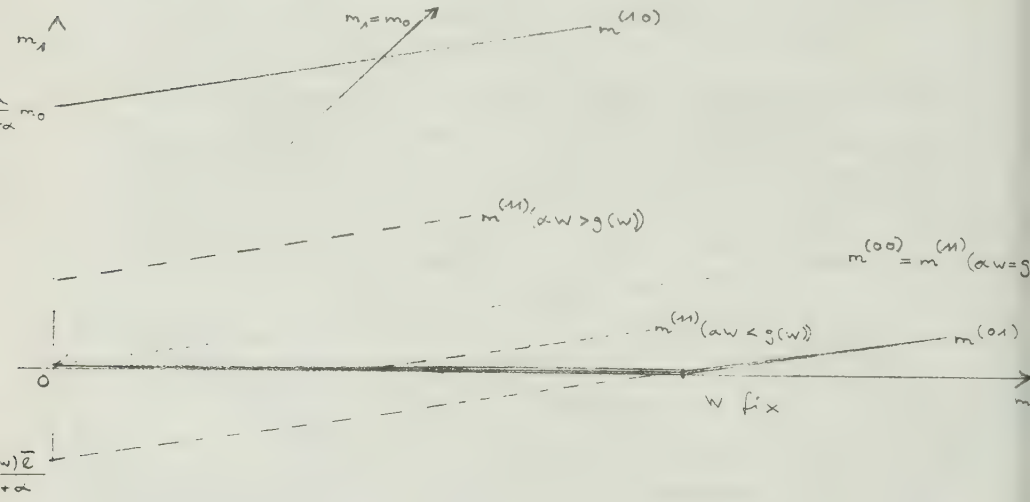
$$m_1^{(1,q)} = \frac{C + \sqrt{C^2 + D}}{2(1+\alpha)} \quad \text{mit} \quad C := \alpha(w_1\bar{l} + m_o + g(w_1)\bar{l}\ (q - 1 - \tfrac{1}{\alpha})$$

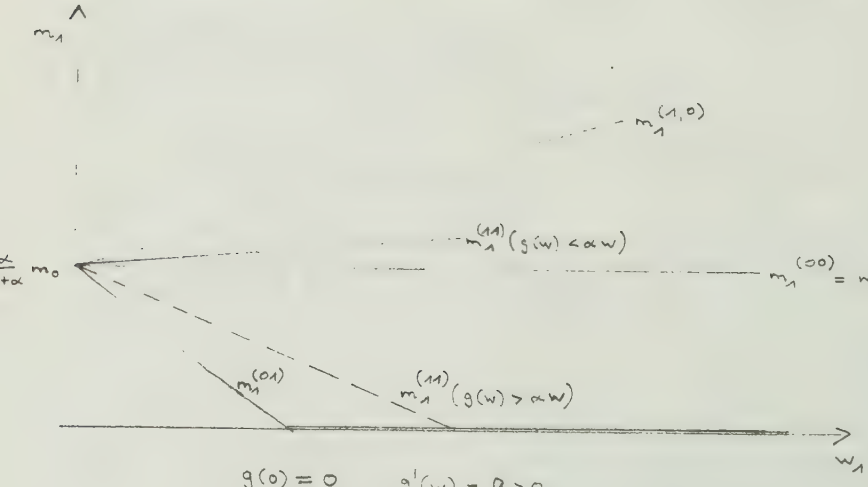
$$D := 4\alpha(1+\alpha)(m_o + w_1\bar{l})(1-q)\ g(w_1)\bar{l}$$

dabei gilt: $\lim_{m_o \to \infty} m_1^{(1,q)} = \frac{\alpha}{1+\alpha}(w_1\bar{l} + m_o) - \frac{g(w_1)\bar{l}\cdot q}{1+\alpha}$

$$\doteq \frac{\alpha}{1+\alpha} m_o + \frac{\bar{l}(\alpha w_1 - q g(w_1))}{1+\alpha}$$

Wie man sofort sieht, ist hier in jedem der möglichen Fälle die Geldhaltung vom Preisniveau vollkommen unabhängig.





$g(0) = 0 \quad , \quad g'(w) = \beta > 0$

Zusammenfassung :

Ziel des vorangehenden Kapitels war es, die Nachfrageentscheidungen des Konsumenten näher zu untersuchen. Die meisten Ergebnisse sind in Übereinstimmung mit der Erwartung, so etwa die Aussage von Lemma 2a), daß mit steigendem Lohn (Preis) der Konsum wächst (fällt) . Dabei ist die letzte Aussage ziemlich "robust" : Erst bei sehr elastischer Preiserwartung kann der Fall eintreten, daß mit steigendem Preis mehr konsumiert wird (siehe Beispiel O) .

Interessanter ist, wie die Geldhaltung auf Preis (Lohn) veränderungen reagiert. Wir haben gesehen, daß in Abhängigkeit von der Elastizität η und der Risikoaversion r noch bestimmte Aussagen über $\frac{\partial m_1}{\partial p_1}$ gemacht werden können. Es gilt dabei erstaunlicherweise nicht allgemein, daß bei zunehmendem Preis mehr Geld gehalten wird, wenn die Risikoaversion zunimmt, hier geht die Preiserwartung stark mit ein. Über die Auswirkungen von Lohnveränderungen konnten wir nur im Extremfall (morgige Arbeitslosigkeit) eine Aussage machen. Das ist im ersten Moment verwunderlich, da man erwarten würde, daß - ähnlich wie bei Erhöhungen des Erstgeldbestandes - auch zusätzlicher Lohn auf Konsum und Geldhaltung aufgeteilt wird, da nicht einzusehen ist, warum das Individuum zwischen Geld aus der letzten und dieser Periode unterscheiden sollte. Die Erklärung dafür ist jedoch, daß an den heutigen Lohn die morgige Lohnerwartung gekoppelt ist, man kann zeigen, daß

$\frac{\partial m_1}{\partial w_1} > 0$ gilt, wenn $g(w_1) =$ konstant.

Lemma 2 zeigt zusätzlich, daß es sinnvoll war, sich auf konstantes Arbeitsangebot festzulegen, hängt ℓ noch von p_1 und w_1 ab, so ist keine positive Aussage mehr möglich.

Die Ergebnisse von Lemma 3 sind normal : Ist ein höherer Lohn morgen sicher, so wird weniger Geld gehalten und mehr konsumiert. Wächst auch die Preiserwartung, so nimmt mit zunehmender Risikoaversion r der Wunsch zu, mehr Geld für morgen zu halten, allerdings auch wieder nur im Fall konstanten r's .

Die Existenz eines Real-balance-Effektes läßt sich mit Sicherheit nur bei linearen Erwartungen zeigen; es ist allerdings plausibel, daß er bei überproportional wachsender (fallender) Lohn (Preis) Erwartung verschwindet. Wie wir noch an einem Beispiel sehen werden, ist es jedoch möglich, daß - auch bei linearen Erwartungen - in einem Mehr-Güter-Modell überhaupt kein solcher Effekt auftritt . In Lemma 4 wurde abschließend ein bestimmtes Randverhalten analysiert : Es gilt, wenn wiederum die Preiselastizität η nicht zu groß wird ($\eta \leq 1$) , daß mit sehr stark fallendem Preis der Konsum unbeschränkt wächst, es sei nochmals darauf hingewiesen, daß dieser Fall von Hool [18] nicht behandelt wurde.

II Der Produktionssektor

Die Firma j besitzt aus Lagerhaltung aus den letzten Perioden g_{o_j} Einheiten des Konsumgutes $(g_{oj} > o)$. Sie verkauft davon heute V_j Einheiten und kauft gleichzeitig l_j^N Einheiten Arbeit, aus denen vermöge einer neoklassischen Produktionsfunktion F_j (F_j zweimal stetig differenzierbar, $F_j(o) = o$, $F_j' > o$, $F_j'' < o$), das Konsumgut als Output produziert wird. Da der Produktionsprozeß Zeit benötigt, steht dieser Output erst zu Beginn der zweiten Periode zur Verfügung. Die Firma hat nun Erwartungen über den morgigen Preis p_2, $p_2 =: h_j(p_1)$, mit $h_j : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}_{++}$, h_j differenzierbar, und über mögliche Rationierungen auf dem Gütermarkt. Die erwartete Güternachfrage sei eine stetige Zufallsvariable X_j mit Dichte $d_j(x)$, $d_j : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ und Verteilungsfunktion $D_j(x)$.

Ziel ist es nun, die erwarteten Profite zu maximieren, der Profit morgen werde mit $\beta_j (o < \beta_j \leq 1)$ abdiskontiert. (Im weiteren wird der Index j weggelassen)

Es seien noch zwei Möglichkeiten unterschieden:

1) Die Firma besitzt keine Gelderstausstattung, die nachgefragte Arbeit muß dann aus den heutigen Verkaufserlösen bezahlt werden, da auch der Produzent eine Budgetgleichung hat, gilt:
   $p_1 V + [\, m_o \,] = w_1 l^N + m_1$, dabei ist m_1 der Geldbestand am Ende der ersten Periode.
2) Die Firma besitzt eine Ausstattung an Geld, nämlich m_o . Da der Zeitpunkt der Verkäufe innerhalb der ersten Periode nicht sicher ist, die Arbeit aber sofort zu Periodenbeginn bezahlt werden muß, ist sie mit m_o zu zahlen.

Wir fassen zusammen :

Def.: Eine Firma, beschrieben durch $(g_o, F(1), h(p), D(\mathbf{x}), [m_o])$ heißt vom C1-Typ, wenn gilt :

a) F ist zweimal stetig differenzierbar ,
$F(0) = 0 \quad , \quad F' > 0 \quad , \quad F'' < 0$

b) $h : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}_{++}$ ist differenzierbar ,

c) $g_o > 0 \quad , [\, m_o > 0 \,]$

d) X ist eine stetige Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion D und Dichte d ,
$d : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \quad , \quad d$ stetig $\quad , \quad d(x) > 0$ für alle $x > 0$.

Diese Eigenschaften seien im Folgenden vorausgesetzt .

Es wäre realitätsnäher, die Erwartung über die morgige Nachfrage auch noch vom dann herrschenden Preis abhängig zu machen. Da wir aber wieder Komparative Statik betreiben und zum anderen mit dem Fall, daß die Firma keine Rationierung erwartet, vergleichen wollen, sei aus Vereinfachungsgründen darauf verzichtet. Aus denselben Gründen haben wir uns auch auf die beiden speziellen Fälle 1) und 2) beschränkt und nicht den Fall, in dem Arbeit aus Verkauf und Erstgeld bezahlt wird (also Ausnutzung der vollen Budgetgleichung $p_1 V + m_o = w_1 \, l + m_1$) behandelt, denn hier sind noch mehr Unterscheidungen zu machen und einige für die Eindeutigkeit eines Gleichgewichtes notwendige Voraussetzungen (etwa Lemma 7) gelten nicht mehr notwendigerweise.

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, daß wir analog zu Grandmont [12] keine Dividendenverteilung an die Konsumenten vornehmen.

Alle diese Annahmen sind natürlich restriktiv und beschreiben nur annähernd die Wirklichkeit ; da es aber nur das Ziel des nachfolgenden Abschnittes ist, statt der sonst üblichen atemporären Behandlung ganz explizit die Erwartungsbildung auch bei der Firma einzuführen, sind sie zu rechtfertigen. (In weiterführenden Arbeiten müßten diese Probleme natürlich miteinbezogen werden.) .

Damit stellt sich das Problem formal wie folgt :

Der Produzent treffe heute die Entscheidung (V, l^N) . Dann ist sein erwarteter Gewinn:

$$M(V, l^N) = p_1 V - w_1 l^N + \beta \tilde{E}(h(p_1)X)) =$$

$$p_1 V - w_1 l^N + \beta h(p_1)\Big[\int_0^{g_o - V + F(l)} x \, d(x)\, dx + (g_o - V + F(l)) \int_{g_o - V + F(l)}^{\infty} d(x)\, dx \Big]$$

M ist wohldefiniert, da $\tilde{E}(h(p_1)X) \leq g_o - V + F(l)$.

Gesucht ist dann

max $M(V, l^N)$ unter den Nebenbedingungen

$$0 \leq V \leq g_o$$

$$l^N \geq 0$$

und bei 1) $\quad w_1 l^N \leq p_1 V$

bei 2) $\quad w_1 l^N \leq m_o$

Sei $G(x)$ Stammfunktion zu $x\, d(x)$. Dann ist

$$N(l , V, p_1, w_1) = p_1 V - w_1 l + \beta h(p_1)\, G(g_o - V + F(l))$$

$$+ \beta h(p_1)(g_o - V + F(l))(1 - D(g_o - V + F(l)) \quad \text{eine stetige}$$

Funktion und die Korrespondenzen

$$\beta_1 : \mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R}^2_{+}$$

$$(p_1, w_1) \to \{(V, l^N) \mid 0 \leq V \leq g_o,\ w_1 l^N \leq p_1 V\}$$

$$\beta_2 : \mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R}^2_{+}$$

$$(p_1, w_1) \to \{(V, l^N) \mid 0 \leq V \leq g_o,\ 0 \leq l^N \leq \frac{m_o}{w_1}\}$$

sind für $(p_1, w_1) >> o$ kompaktwertig, $\neq \emptyset$ und stetig. Mithilfe von Satz [2], Anhang, existiert dann wieder zu jedem (p_1, w_1) wenigstens ein Maximum und $V(p_1, w_1)$, $l^N(p_1, w_1)$ sind stetige Funktionen ihrer Argumente. (Im weiteren oft l statt l^N.)

Um das (die) jeweilige(n) Maximum(a) genauer berechnen zu können, machen wir - zuerst für das erste Problem, einen Kuhn-Tucker Ansatz:

$$K(V, l) = p_1V - w_1l + \beta h(p_1) [G(g_o - V + F(l)) + (g_o - V + F(l))(1 - D(g_o - V + F(l)))] + \lambda(g_o - V) + \mu(p_1V - w_1l) + \mu_1V + \mu_2l$$

$$\mu, \lambda, \mu_i \geq o \ , \ \lambda(g_o - V) = o \ , \ \mu(p_1V - w_1l) = o \ , \ \mu_1V = o = \mu_2l$$

In einem Extremwert muß nun gelten:

$$\frac{\partial K}{\partial V} = p_1 - \beta h(p_1)(1 - D(g_o - V + F(l)) - \lambda + p_1\mu + \mu_1 = o$$

$$\frac{\partial K}{\partial l^N} = - w_1 + \beta h(p_1) F'(l)(1 - D(g_o - V + F(l)) - \mu w_1 + \mu_2 = o$$

Nun sei $\mu_1 > o$, also der heutige Verkauf $V = o$, damit notwendigerweise $l = o$. Das ist aber nur möglich, wenn

$$\frac{\partial M}{\partial V}(o, o) \leq o \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial M}{\partial l}(o, o) \leq o \qquad , \quad \text{also}$$

wenn $p_1 - \beta h(p_1)\,(1 - D(g_o)) \leq o$ und

$$- w_1 + \beta h(p_1)\, F'(o)\,(1 - D(g_o)) \leq o$$

$$\Rightarrow \quad F'(o) \leq \frac{w_1}{p_1}$$

Bei einer Produktionsfunktion mit $F'(o) = \infty$ ist dieser Fall unmöglich.

Gilt bei beliebigem F: $F'(o) \leq \frac{w_1}{p_1}$, so lohnt es sich also nicht, Arbeit nachzufragen, die einzige Aktivität der Firma besteht dann im Verkauf, der nur dann o ist, wenn $\frac{p_1}{\beta h(p_1)} \leq 1 - D(g_o)$ gilt.

Somit ist für $F'(o) > \frac{w_1}{p_1}$ oder $\frac{p_1}{\beta h(p_1)} > 1 - D(g_o)$ der Verkauf V immer positiv, mithin $\mu_1 = o$

Da auch $1 = O$, $(\mu_2 > O)$ nur dann auftritt, wenn $p_1 \leq \frac{w_1}{F'(o)}$ oder $\beta h(p_1) \leq \frac{w_1}{F'(o)}$, betrachten wir im weiteren $\mu_1 = \mu_2 = o$

Wir haben dann 4 Fälle zu unterscheiden

1) $\lambda = o = \mu$

Nun ist

$$\frac{\partial^2 M}{\partial V^2} = - \beta h(p_1)\, d(g_o - V + F(1)) < o$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial l^2} = \beta h(p_1)[F''(l)(1 - D(g_o - V + F(l)) - F'^2(l)d(g_o - V + F(l))] < o$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial V \partial l} = \beta h(p_1)\, d(g_o - V + F(l))\, F'(l) > o \qquad \text{und}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 M}{\partial V^2} & \frac{\partial^2 M}{\partial V \partial l} \\ \frac{\partial^2 M}{\partial V \partial l} & \frac{\partial^2 M}{\partial l^2} \end{vmatrix} = -(\beta h(p_1))^2 d(g_o - V + F(l))(1 - D(g_o - V + F(l))F'' > o$$

Die Hesse'sche ist also negativ definit, somit liegt ein Maximum vor.

Durch Subtraktion der beiden Bestimmungsgleichungen (A) - (B) erhält man:

$l^* = F'^{-1}(\frac{w_1}{p_1})$, V^* löst die Gleichung

$$\frac{p_1}{\beta h(p_1)} = 1 - D(g_o - V^* + FF'^{-1}(\frac{w_1}{p_1}))$$

Bei festen p_1, w_1, g_o ist die Lösung eindeutig, da D als Verteilungsfunktion monoton ist.

Allgemein erhält man durch Subtraktion von (A) - (B) :

$$-\frac{\lambda}{\mu+1} + p_1 = \frac{w_1}{F'(l)} \quad , \text{ somit } \lambda > o \Rightarrow \frac{w_1}{p_1} < F'(l)$$

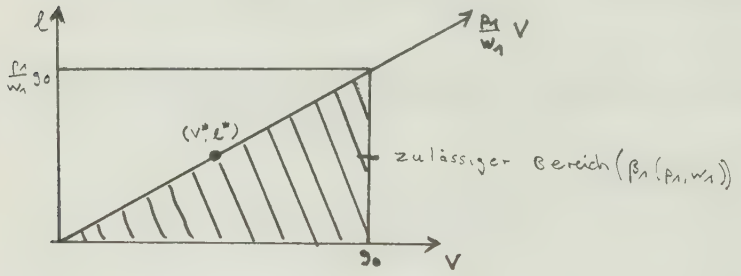
$$\lambda = o \Rightarrow \frac{w_1}{p_1} = F'(l)$$

2) $\lambda = o \quad , \mu > o$

Es ist $l^* = F'^{-1}(\frac{w_1}{p_1})$ und wegen $\mu > o$ $V^* = \frac{w_1}{p_1} F'^{-1}(\frac{w_1}{p_1})$ also sind die Entscheidungen eindeutig und

$$\frac{\partial M}{\partial l}(V^*, l^*) > o \quad \text{und} \quad \frac{\partial M}{\partial V}(V^*, l^*) < o$$

Damit ist (V^*, l^*) Maximum, da es gerade auf dem Rand des zulässigen Gebietes liegt.



3) $\lambda > o \quad , \mu = o \quad ,$ damit $V^* = g_o$ und l^* löst die Gleichung

$$\frac{\beta h(p_1)\, F'(l)}{w_1} = \frac{1}{1 - D(F(l))}$$

Auch diese Lösung ist eindeutig, da die linke Seite in l monoton fällt, die rechte dagegen monoton wächst. Es gilt

$$\frac{\partial M}{\partial V}(g_o, l^*) > o \quad , \quad \frac{\partial M}{\partial l}(g_o, l^*) = o$$

Da $\frac{\partial M}{\partial l}(g_o, l) \underset{l \to \infty}{\to} - w_1$ und $\frac{\partial^2 M}{\partial l^2} < o$, muß

$\frac{\partial M}{\partial l}(g_o, l) > o$ sein für $l < l^*$, mithin ist (g_o, l^*) ein

Maximum.

4) $\lambda > o$, $\mu > o$

Damit ist $V^* = g_o$, $l^* = \frac{p_1}{w_1} g_o$, die Lösung mithin eindeutig,

weiterhin gilt $\frac{\partial M}{\partial l}(g_o, \frac{p_1}{w_1} g_o) > o$ daher ist (V^*, l^*) wieder

ein Maximum.

Herrscht Sicherheit d.h. die Firma kann ihren gesamten Output morgen verkaufen, so haben wir zu maximieren

$$M(V, l) = p_1 V - w_1 l + \beta h(p_1)(g_o - V + F(l))$$

unter den Nebenbedingungen $g_o \geq V \geq o$, $l \geq o$

$$p_1 V \geq w_1 l$$

Umschreiben liefert:

$$\max \beta h(p_1) g_o + V(p_1 - \beta h(p_1)) + \beta h(p_1) F(l) - w_1 l$$

NB : $g_o \geq V \geq o$, $l \geq o$

$p_1 V \geq w_1 l$

Wie man sieht, ist das Problem linear in V , somit gilt:

1) $p_1 > \beta h(p_1)$ In diesem Fall ist $V = g_o$, der gesamte Lagerbestand wird heute verkauft.

Der gewünschte optimale Arbeitsinput ergibt sich als

$l^* = F'^{-1}(\frac{w_1}{\beta h(p_1)})$, dabei muß natürlich $F'(o) > \frac{w_1}{\beta h(p_1)}$ gelten.

Ist $p_1 g_o \geq w_1 l^*$, kann l^* auch realisiert werden, andernfalls wird $l = \frac{p_1}{w_1} g_o$ an Arbeit nachgefragt.

2) $p_1 < \beta h(p_1)$. Betrachtet man nur die optimale Verkaufsentscheidung, so möchte die Firma eigentlich den Gesamtbestand nach morgen transferieren, da aber dann kein Geld zum Ankauf von Arbeit zur Verfügung steht, wird gerade soviel verkauft, um den gewünschten optimalen Arbeitsinput damit bezahlen zu können, also $p_1 v = w_1 l^*$. Damit lautet das Problem:

$$\max_l \ \beta h(p_1)(g_o + F(l) - \frac{w_1}{p_1} l) \qquad \text{NB} : g_o \geq \frac{p_1}{w_1} l \geq o$$

Das liefert $l^* = F'^{-1}(\frac{w_1}{p_1})$ als Lösung, wenn $l^* \leq \frac{p_1}{w_1} g_o$ und $F'^{-1}(\frac{w_1}{p_1}) \geq 0$, ansonsten $\frac{p_1}{w_1} g_o$ (bzw. $l = 0$).

Wir wollen die bisher erhaltenen Ergebnisse in einem Satz zusammenfassen, dazu sei vorher noch folgendes definiert:

$$D_1 := D(g_o + FF'^{-1}(\frac{w_1}{p_1}))$$

$$D_2 := D(FF'^{-1}(\frac{w_1}{p_1}))$$

$$D_3 := D(g_o + FF'^{-1}(\frac{w_1}{p_1}) - \frac{w_1}{p_1} F'^{-1}(\frac{w_1}{p_1}))$$

Damit gilt der folgende

Satz 4:

Die Firma sei vom C1-Typ, also unsicher über mögliche Rationierung auf dem morgigen Gütermarkt. Dann sind die optimalen Verkaufs- und Arbeits-Nachfrageentscheidungen $V(p_1, w_1)$, $l(p_1, w_1)$ eindeutig bestimmt und stetig für $(p_1, w_1) >> 0$. Ist $F'(0) = \infty$, so gilt : $V(p_1, w_1) > 0$, $l(p_1, w_1) > 0$.

Im einzelnen gilt :

1) $F'(o) \leq \frac{w_1}{p_1}$ (damit tritt $g_o \leq \frac{w_1}{p_1} F'^{-1}(\frac{w_1}{p_1})$ nicht auf)

$$\beta h(p_1) \in \begin{cases} (o, p_1] & & V^* = g_o \\ [p_1, \frac{p_1}{1-D(g_o)}] & l^* = o & V^* \text{ löst } \beta h(p_1) = \frac{p_1}{1-D(g_o-V)} \\ [\frac{p_1}{1-D(g_o)}, \infty) & & V^* = o \end{cases}$$

2) $F'(o) > \frac{w_1}{p_1}$

a) $g_o < \frac{w_1}{p_1} F'^{-1}(\frac{w_1}{p_1})$

$$\left.\begin{array}{ll} \left(0, \dfrac{w_1}{F'(0)}\right] & l^* = 0 \qquad V^* = g_0 \\ \left[\dfrac{w_1}{F'(0)}, p_2^*\right] & l^* \text{ löst } \dfrac{w_1}{F'(l)} = \beta h(p_1)(1-D(F(l))) \\ & V^* = g_0 \\ (p_2^*, \infty) & l^* = \dfrac{p_1}{w_1} g_0 \qquad V^* = g_0 \end{array}\right\} \beta h(p_1) \in$$

dabei gilt: $$\frac{w_1}{F'(\frac{p_1}{w_1} g_0)} = p_2^* (1 - D(F(\frac{p_1}{w_1} g_0)))$$

b) $g_0 \geq \dfrac{w_1}{p_1} F'^{-1}(\dfrac{w_1}{p_1})$

$$\left.\begin{array}{ll} \left(0, \dfrac{w_1}{F'(0)}\right] & l^* = 0 \qquad V^* = g_0 \\ \left[\dfrac{w_1}{F'(0)}, \dfrac{p_1}{1-D_2}\right] & l^* \text{ löst } \dfrac{w_1}{F'(l)} = \beta h(p_1)(1-D(F(l))) \\ & V^* = g_0 \\ \left[\dfrac{p_1}{1-D_2}, \dfrac{p_1}{1-D_3}\right] & l^* = F'^{-1}(\dfrac{w_1}{p_1}) \quad V^* \text{ löst } \beta h(p_1) = \dfrac{p_1}{1-D(g_0-V+FF'^{-1}(\frac{w}{p}} \\ \left[\dfrac{p_1}{1-D_3}, \infty\right) & l^* = F'^{-1}(\dfrac{w_1}{p_1}) \quad V^* = \dfrac{w_1}{p_1} F'^{-1}(\dfrac{w_1}{p_1}) \end{array}\right\} \beta h(p_1) \in$$

Unter Sicherheit gilt für $(p_1,w_1) >> 0$:

Die Arbeitsnachfrage ist immer eindeutig und stetig, dasselbe gilt für den Verkauf mit Ausnahme der Punkte p_1 mit $\beta h(p_1) = p_1$. Hier ist V i.a. unstetig und nicht eindeutig.(V ist u.h.c und kompaktwertig, aber i.a. nicht l.h.c)

a) $F'(o) \leq \frac{w_1}{p_1}$

$\beta h(p_1) < p_1$	$l^* = o$	$V^* = g_o$
$\beta h(p_1) > p_1$	$l^* = o$	$V^* = o$

b) $F'(o) > \frac{w_1}{p_1}$

b1) $\frac{w_1}{p_1} F'^{-1}(\frac{w_1}{p_1}) \leq g_o$

$\beta h(p_1) \in (o, \frac{w_1}{F'(o)}]$	$l^* = o$	$V^* = g_o$
$\in (\frac{w_1}{F'(o)}, p_1)$	$l^* = F'^{-1}(\frac{w_1}{\beta h(p_1)})$	$V^* = g_o$
$\in (p_1, \infty)$	$l^* = F'^{-1}(\frac{w_1}{p_1})$	$V^* = \frac{w_1}{p_1} F'^{-1}(\frac{w_1}{p_1})$

b2) $\frac{w_1}{p_1} F'^{-1}(\frac{w_1}{p_1}) > g_o$

Sei p_2^* so, daß $F'^{-1}(\frac{w_1}{p_2^*}) = \frac{p_1}{w_1} g_o$, oder $p_2^* = \frac{w_1}{F'(\frac{p_1}{w_1} g_o)}$

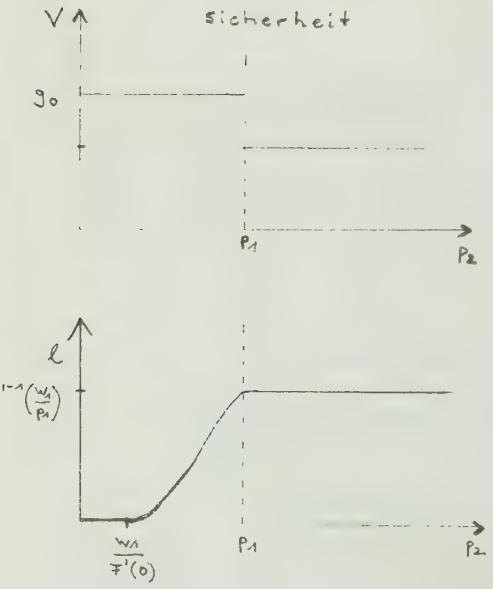
$$\beta h(p_1) \in \left(0 , \frac{w_1}{F'(0)}\right] \qquad l^* = 0 \qquad V^* = g_0$$

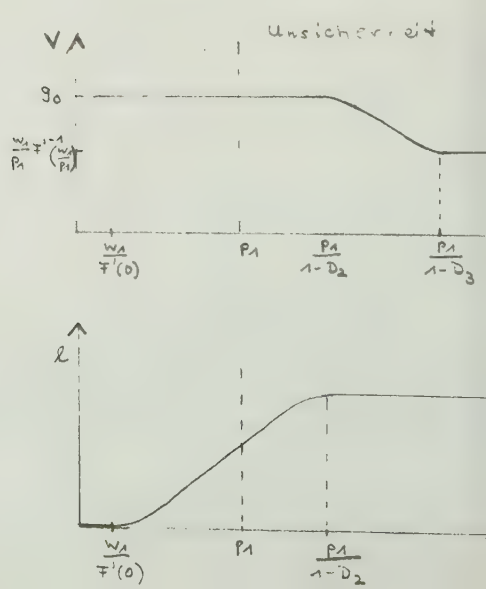
$$\in \left(\frac{w_1}{F'(0)} , p_2^*\right] \qquad l^* = F'^{-1}\left(\frac{w_1}{\beta h(p_1)}\right) \qquad V^* = g_0$$

$$\in (p_2^* , \infty) \qquad l^* = \frac{p_1}{w_1} g_0 \qquad V^* = g_0$$

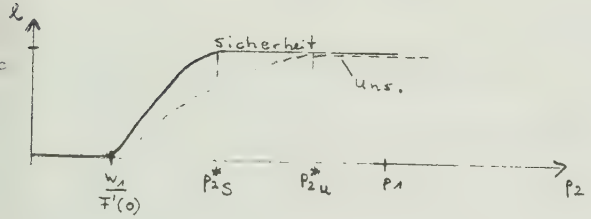
Wir werden uns V^* und l^* in dem folgenden Diagramm ansehen.

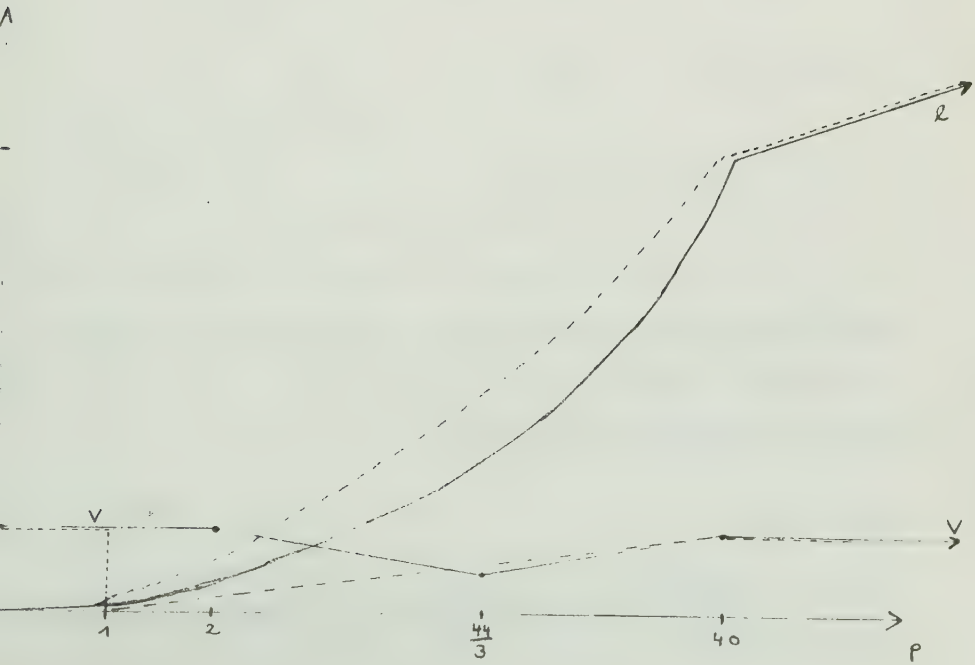
Wir betrachten (V^*, l^*), in Abhängigkeit sich ändernder Erwartung $p_2 = \beta h(p_1)$. Wir halten also (p_1, w_1, g_0) fix und nehme an, daß $F'(0) > \frac{w_1}{p_1}$ und $g_0 > \frac{w_1}{p_1} F'^{-1}\left(\frac{w_1}{p_1}\right)$ ist.





Ist $g_o < \frac{w_1}{p_1} F'^{-1}(\frac{w_1}{p_1})$, so wird unter Sicherheit wie unter Unsicherheit immer der gesamte Output verkauft, für die Arbeitsnachfrage gilt:





Beispiel 4:

Oben wird in einem Spezialfall die Abhängigkeit von V und l vom Preis betrachtet.

Sei $\beta h(p_1) = p_1^2$, $g_o = 1o$, $w_1 = 1$, $F(l) = \sqrt{l}$

$$D(x) = \frac{x}{x+1} \text{ , also } d(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Es gilt dann

$p_1 \in [\ o,\ 2\ ]$ $\quad V = 1o$, $\quad l = \dfrac{p_1^2 + 1 - \sqrt{1 + 2p_1^2}}{2}$

$\in [\ 2,\ \frac{44}{3}\ ]$ $\quad V = 11 - \dfrac{p_1}{2}$

$[\ \frac{44}{3}\ ,\ 4o\ ]$ $\quad V = \dfrac{p_1}{4}$ $\quad \Big\} \ l = \dfrac{p_1^2}{4}$

$[\ 4o,\ \infty\ ]$ $\quad V = 1o$ $\quad l = 1op_1$

($\frac{p_1^2}{4}$ wäre die Arbeitsnachfrage bei atemporärer Betrachtung des Produktionssektors). Gestrichelt ist zum Vergleich der Fall der vollkommenen Sicherheit eingezeichnet. Während l monoton wächst, ist V für $p_1 \in [\ 2,\ \frac{44}{3}\ ]$ monoton fallend.

Damit gilt also

Unter Unsicherheit wird - bei verschiedenen Preiserwartungen - i.a. mehr verkauft und auch weniger Arbeit nachgefragt als unter

Sicherheit. Liegt die Preiserwartung zwischen dem heutigen Preis p_1 und $\frac{p_1}{1-D_3}$, so wird aufgrund der Unsicherheit mehr verkauft, und zwischen p_1 und $\frac{p_1}{1-D_2}$ weniger Arbeit nachgefragt.

Gehen wir nun davon aus, daß die Arbeit mit der Gelderstausstattung bezahlt werden muß, so hat die zu maximierende Funktion die folgende Gestalt:

$$K(V, l) = p_1V - w_1l + \beta h(p_1)\Big[\int_0^{g_o-V+F(l)} xd(x)dx + (g_o - V + F(l)) \int_{g_o-V+F(l)}^{\infty} d(x)dx\Big]$$

$$+ \lambda_1(g_o - V) + \lambda_2V + \lambda_3(m_o - w_1l) + \lambda_4l$$

$$\lambda_i \geq o \ , \ o = \lambda_1(g_o - V) = \lambda_2V = \lambda_3(m_o - w_1l) = \lambda_4l$$

Notwendige Bedingungen für ein Maximum sind:

$$\frac{\partial K}{\partial V} = p_1 - \beta h(p_1)(1 - D(g_o - V + F(l)) - \lambda_1 + \lambda_2 = o$$

$$\frac{\partial K}{\partial l} = -w_1 + \beta h(p_1)\, F'(l)(1 - D(g_o - V + F(l)) - w_1\lambda_3 + \lambda_4 = o$$

Es gilt dann wieder, durch analoge Betrachtung wie in Satz 4 .

Satz 5:

Die Firma sei vom C-1 Typ. Dann sind die optimalen Verkaufs- und Arbeitsnachfrageentscheidungen eindeutig bestimmt und

stetig für $(p_1,w_1) >> 0$. Ist $F'(0) = \infty$, so ist $\ell(p,w) > 0$.
Im einzelnen gilt, in Abhängigkeit von der morgigen Preiserwartung:

1) $F'(o) \leq \frac{w_1}{p_1}$ (Der Fall $m_o \leq w_1 F'^{-1}(\frac{w_1}{p_1})$ tritt nicht auf)

$(0,p_1]$ $\quad l^* = 0 \quad V^* = g_o$

$(p_1, \frac{p_1}{1-D(g_o)}]$ $\quad l^* = 0$; V^* löst $p_2 = \frac{p_1}{1-D(g_o-V)}$

$\beta h(p_1) \in [\frac{p_1}{1-D(g_o)}, \frac{w_1}{F'(0)(1-D(g_o))}]$ $\quad l^* = 0 \quad V^* = 0$

$[\frac{w_1}{F'(0)(1-D(g_o))}, \frac{w_1}{F'(\frac{m_o}{w_1})(1-D(g_o+F(\frac{m_o}{w_1})))}]$ $\quad V^* = 0$, l^* erfüllt

$$\frac{w_1}{F'(l)} = p_2(1-D(g_o + F(l)))$$

$[\frac{w_1}{F'(1-D(\cdot)}, \infty)$ $\quad l^* = \frac{m_o}{w_1} \quad V^* = o$

2) $F'(o) > \frac{w_1}{p_1}$

2a) Sei $m_o > w_1 F'^{-1}(\frac{w_1}{p_1})$, sei $D_5 := D(g_o + F(\frac{m_o}{w_1}))$ $D_4 := D(F(\frac{m_o}{w_1}))$

$\beta h(p_1) \in$

$(o, \frac{w_1}{F'(o)}]$	$l^* = o$	$V^* = g_o$
$(\frac{w_1}{F'(o)}, \frac{p_1}{1-D_2}]$	l^* löst $\frac{w_1}{F'(l)} = p_2(1-D(F(l))$	$V^* = g_o$
$[\frac{p_1}{1-D_2}, \frac{p_1}{1-D_1}]$	$l^* = F'^{-1}(\frac{w_1}{p_1})$	V^* löst $p_2 = \frac{p_1}{1-D(g_o-V+FF'^{-1}(\frac{w_1}{p_1}))}$
$[\frac{p_1}{1-D_1}, \frac{w_1}{(1-D_5)F'(\frac{m_o}{w_1})}]$	l^* löst $\frac{w_1}{F'(l)} = p_2(1-D(g_o + F(l))$	$V^* = o$
$[\frac{w_1}{(1-D_5)F'(\frac{m_o}{w_1})}, \infty)$	$l^* = \frac{m_o}{w_1}$	$V^* = o$

2b) Sei $m_o \leq w_1 F'^{-1}(\frac{w_1}{p_1})$

$\beta h(p_1) \in$

$(o, \frac{w_1}{F'(o)})$	$l^* = o$	$V^* = g_o$
$[\frac{w_1}{F'(o)}, \frac{p_1}{1-D_4}]$	l^* löst $\frac{w_1}{F'(l)} = p_2(1 - D(F(l))$	$V^* = g_o$
$[\frac{p_1}{1-D_4}, \frac{p_1}{1-D_5}]$	$l^* = \frac{m_o}{w_1}$	V^* löst $p_1 = p_2(1-D(g_o-V+F(\frac{m_o}{w_1})$
$[\frac{p_1}{1-D_5}, \infty)$	$l^* = \frac{m_o}{w_1}$	$V^* = o$

Sicherheit

Indem man sofort wieder umschreibt, erhält man das folgende Problem:

$$\max \beta h(p_1) g_o + V(p_1 - \beta h(p_1)) + \beta h(p_1) F(l) - w_1 l$$

NB : $g_o \geq V$

$V \geq o$

$m_o \geq w_1 l \geq o$

Es gilt: $p_1 > \beta h(p_1) : V = g_o$

$p_1 < \beta h(p_1) : V = o$

Damit ist die Funktion nur noch bzgl. l zu maximieren.

Ist $F'(o) \leq \frac{w_1}{\beta h(p_1)}$ so ist $l^* = o$, sonst möchte die Firma den Input $l^* = F'^{-1}(\frac{w_1}{\beta h(p_1)})$ realisieren, also

$$\beta h(p_1) \in (o, \frac{w_1}{F'(o)}] \qquad l^* = o$$

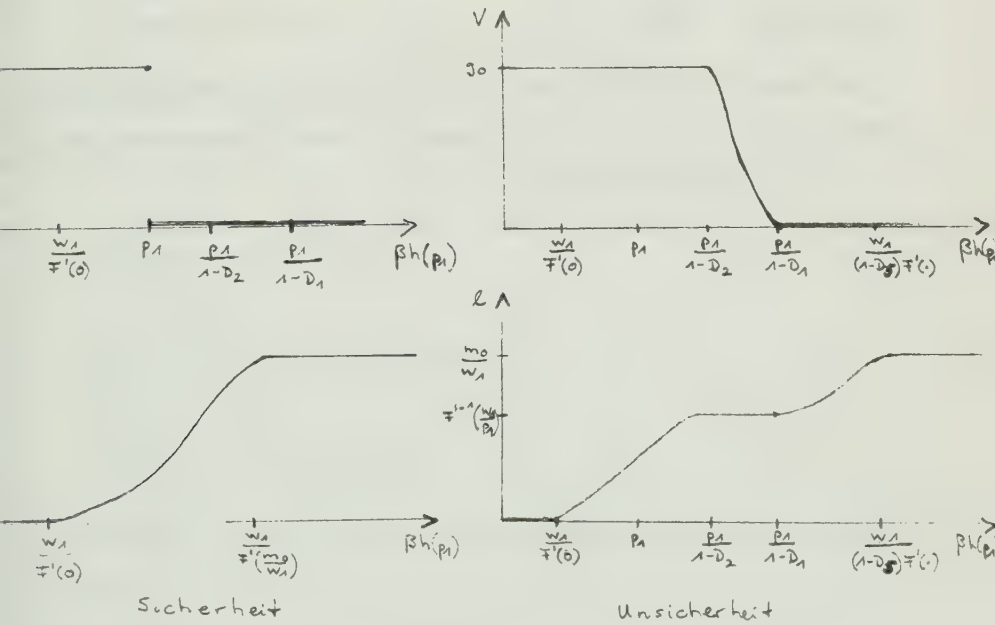
$$\beta h(p_1) \in [\frac{w_1}{F'(o)}, \frac{w_1}{F'(\frac{m_o}{w_1})}) \qquad l^* = F'^{-1}(\frac{w_1}{\beta h(p_1)})$$

$$\beta h(p_1) \in [\frac{w_1}{F'(\frac{m_o}{w_1})}, \infty) \qquad l^* = \frac{m_o}{w_1}$$

l ist damit wieder stetig, V u.h.c. für $(p_1, w_1) >> o$.

Wir halten nun wieder (p_1, w_1) fest und betrachten, wie sich der Verkauf und die Arbeitsnachfrage bei variierendem Preis p_2 verändern. Wieder werden Sicherheit und Unsicherheit einander gegenübergestellt.

Sei $F'(o) > \frac{w_1}{p_1}$ und $m_o > w_1 F'^{-1}(\frac{w_1}{p_1})$



Man sieht, daß im Unsicherheitsfall die Firma wegen des größeren Absatzrisikos selbst bei größerem Preis als heute noch den Gesamtlagerbestand g_o verkauft; wächst der erwartete Preis noch stärker, so werden die heutigen Verkäufe nach und nach eingeschränkt. Erst bei sehr hohen Preisen wird die Firma ihre heutigen Bestände nach morgen transferieren, es muß $\beta h(p_1) \geq \frac{p_1}{1-D_1}$ sein.

Bei starker Rationierung bzw. sehr großem g_o wird

$1 - D_1 = 1 - D(g_o + FF'^{-1}(\frac{w_1}{p_1})) \sim o$ sein, so daß bei realistischen Preiserwartungen alles oder doch sehr große Lagerbestände verkauft werden.

Die Arbeitsnachfrage wächst monoton, bleibt dann für bestimmte Erwartungen $(\beta h(\underline{p}_1) \in [\frac{p_1}{1-D_2}, \frac{p_1}{1-D_1}])$ konstant, um dann weiter zu wachsen bis zu dem Betrag, der gerade noch mit m_o finanziert werden kann. Unter Sicherheit wächst die Arbeitsnachfrage monoton bis zur Finanzierungsgrenze.

Beispiel 5:

Wir wollen wieder die Abhängigkeit von V und l vom Preisniveau p_1 betrachten. Dazu seien wieder wie bei Fall 1):

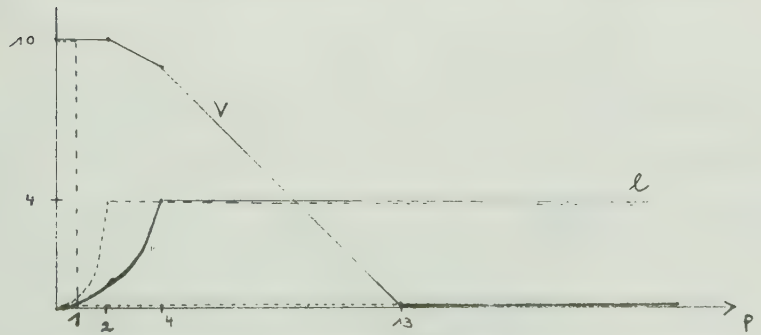
$$\beta h(p_1) = p_1^2 \;,\; F(l) = \sqrt{l} \;,\; m_o = 4 \;,\; D(x) = \frac{x}{x+1} \;,\; w_1 = 1$$

$$g_o = 1o$$

Es gilt dann:

$p_1 \in [\, o,\, 2\,]$	$l = \dfrac{p_1^2 + 1 - \sqrt{1+2p_1^2}}{2}$	$V = 1o$
$p_1 \in [\, 2,\, 4\,]$	$l = \dfrac{p_1^2}{4}$	$V = 11 - \dfrac{p_1}{2}$
$p_1 \in [\, 4,\, 13]$	$l = 4$	$V = 13 - p_1$
$p_1 \in [13,\, \infty\,)$	$l = 4$	$V = o$

Gestrichelt sind wieder die Entscheidungen bei Sicherheit eingetragen.



Natürlich ist hier neben V auch l beschränkt; im Gegensatz zu Fall 1) ist V jedoch hier monoton nicht wachsend.

Komparative Statik

Wir haben uns bisher schon damit beschäftigt, die Abhängigkeit der Verkaufsentscheidung V und der Arbeitsnachfrage l^N vom Preis und Lohn zu betrachten. Wir wollen das jetzt fortführen. In den Sätzen 4, 5 wurde gezeigt, daß bei Unsicherheit über die morgige Nachfrage $V(p_1, w_1)$, $l^N(p_1, w_1)$ stetige Funktionen sind. Allgemeiner kann man aber nun zeigen, daß V und l in allen folgenden Parametern stetig sind:

$$V = V(p_1, w_1, X, g_o, h, (m_o))$$

$$l^N = l^N(p_1, w_1, X, g_o, h, (m_o)) .$$

Aus der Bestimmung von $V(p_1,w_1)$ und $l(p_1,w_1)$ kann man ersehen, daß auch die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial p_1}, \frac{\partial}{\partial w_1}, \frac{\partial}{\partial g_o}, \left(\frac{\partial}{\partial m_o}\right) \text{ und } \frac{\partial}{\partial a}$$

wenigstens stückweise existieren, wobei $h(p_1) = ap_1$, $a \in \mathbb{R}_+$ gesetzt wurde.

Dann gilt, soweit die Ableitungen existieren, das folgende :

Lemma 5

1) $\frac{\partial l^N}{\partial w_1} \leq o$, $\frac{\partial l^N}{\partial p_1} \geq o$, ist $l^N > 0$, so gilt $\frac{\partial l^N}{\partial w_1} < 0$

2) Sei $R_R^F(y) := - \frac{F''(y)y}{F'(y)}$

Gilt $R_R^F(y) \leq 1$, so ist $\frac{\partial V}{\partial w_1} \leq o$

gilt $R_R^F(y) \leq 1$ und $\frac{\beta dh(p_1)}{dp_1} \leq 1$, so ist $\frac{\partial V}{\partial p_1} \geq o$

3) $\frac{\partial V}{\partial g_o} \geq o$, $\frac{\partial l^N}{\partial g_o}$ ist nicht eindeutig, bei Fall 1 gilt : $\frac{\partial l^N}{\partial g_o} \geq O$,

Fall 2 : $\frac{\partial l^N}{\partial g_o} \leq O$.

4) $\frac{\partial V}{\partial m_o} \geq o$ $\frac{\partial l^N}{\partial m_o} \geq o$

5) $\frac{\partial V}{\partial a} \leq o$ $\frac{\partial l^N}{\partial a} \geq o$

Das bedeutet also: Bei wachsendem Preis(Lohn) ist die Arbeitsnachfrage nicht fallend (nicht wachsend).
Beim Verkauf ist die Abhängigkeit nicht so eindeutig:
Wie wir schon in Beispiel 4, 5 sahen, kann es sehr wohl sein, daß bei steigendem Preis der Verkauf sinkt, daher sind Bedingungen an die Produktionsfunktion und an die Preiserwartung nötig - letztere darf nicht zu stark steigen gegenüber heute. 3) und 5) entsprechen der Erwartung: wegen der Gefahr der Absatzrationierung wird bei größerem Lagerbestand nicht weniger verkauft und nicht mehr Arbeit (Fall 2) nachgefragt; wird die Preiserwartung positiver, so ist der Effekt jeweils umgekehrt. 4) ist natürlich nur dann relevant, wenn die Arbeit aus der Gelderstausstattung bezahlt wird, der Effekt geht dann auch in die richtige Richtung.

Beweis:

Wie man aus Satz 4, 5 ersieht, trifft für jedes (p_1, w_1) genau einer der folgenden Ausdrücke zu:

$$l = \begin{cases} o & \text{a)} \\ \frac{m_o}{w_1} & \text{b)} \\ F'^{-1}(\frac{w_1}{p_1}) & \text{c)} \\ \frac{p_1}{w_1} g_o & \text{d)} \\ l \text{ löst } F'(l)\, \beta h(p_1)(1 - D(g_o + F(l)) - w_1 = o & \text{e)} \\ \text{oder } l \text{ löst } F'(l)\, \beta h(p_1)(1 - D(F(l)) - w_1 = o & \text{f)} \end{cases}$$

Für a) - d) sieht man sofort, daß

$$\frac{\partial l^N}{\partial w_1} \leq o \quad , \quad \frac{\partial l^N}{\partial p_1} \geq o$$

e) und f) unterscheiden sich nur um einen von (p_1, w_1) unabhängigen Term, nämlich g_o. Es reicht daher, e) zu betrachten:

$$\frac{\partial l^N}{\partial w_1} = \frac{-1}{[F''(l)(1 - D(\cdot) - F'^2(l)\, d(\cdot)]\, \beta h(p_1)} =: \frac{1}{N} < o$$

$$\frac{\partial l^N}{\partial p_1} = - \frac{\beta h'(p_1)\, F'(l)(1 - D(\cdot))}{N} > o$$

Wir berechnen sofort die unter 3) - 5) benötigten Ableitungen:

$$\frac{\partial l^N}{\partial g_o} = \begin{cases} o & \text{für a) - c), f)} \\ \frac{p_1}{w_1} > o & \text{d)} \\ - \frac{- F'(l)\ \beta h(p_1)\ d(\cdot)}{N} < o & \text{e)} \end{cases}$$

$\frac{\partial l}{\partial g_o}$ hat damit kein eindeutiges Vorzeichen; im zweiten Fall, in dem die Arbeit mit m_o bezahlt wird, gilt aber $\frac{\partial l^N}{\partial g_o} \leq o$, da der Ausdruck $l(p_1,w_1) = \frac{p_1}{w_1} g_o$ hier nicht auftritt, sonst $\frac{\partial l^N}{\partial g_o} \geq O$.

$$\frac{\partial l^N}{\partial m_o} = \begin{cases} o & \text{a), c), d), f), e)} \\ \frac{1}{w_1} > o & \text{b)} \end{cases}$$

$$\frac{\partial l^N}{\partial a} = \begin{cases} o & \text{a) - d)} \\ - \frac{\beta p_1 F'(l)(1 - D(\cdot))}{N_e(N_f)} > o & \text{e), f)} \end{cases}$$

Dabei ist $N = N_e$ und N_f entsteht aus N, indem das g_o in $D(\cdot)$ wegfällt.

Für V gilt analog:

$$V = \begin{cases} o & a) \\ g_o & b) \\ \text{löst } \beta h(p_1)(1 - D(g_o - V) - p_1 = o & c) \\ \frac{w_1}{p_1} \; F'^{-1}(\frac{w_1}{p_1}) & d) \\ \text{löst } \beta h(p_1)(1 - D(g_o - V + FF'^{-1}(\frac{w_1}{p_1})) - p_1 = o & e) \\ \beta h(p_1)(1 - D(g_o - V + F(\frac{m_o}{w_1})) - p_1 = o & f) \end{cases}$$

Somit gilt:

$\frac{\partial V}{\partial w_1} = o$ a) - c) , $\frac{\partial V}{\partial p_1} = o$ a), b)

c) $\frac{\partial V}{\partial p_1} = - \frac{\beta h'(p_1)(1 - D(\cdot)) - 1}{\beta h(p_1) d(g_o - V)} > o$ wenn $\beta h'(p_1) \leq 1$

zu d)

In Analogie zur Definition der relativen Risikoaversion im Konsumsektor seien hier Produktionsfunktionen F betrachtet mit

$R_R^F(y) := \frac{- F''(y) \cdot y}{F'(y)} \leq 1$. Hierunter fallen etwa alle Funktionen

$F(y) = y^\gamma$, $\gamma \in (o, 1)$ oder $F(y) = \ln(y + 1)$

Sei nun $y := F'^{-1}(\frac{w_1}{p_1}) \Rightarrow \frac{w_1}{p_1} = F'(y)$, also gilt:

$Z(y) := V(F'(y)) = y\,F'(y)$

$Z'(y) = V' \cdot F''(y) = F''(y)y + F'(y) = F'(y)(1 - R_R^F(y)) \geq o$

wenn $R_R^F(y) \leq 1$. Mit wachsendem y wächst Z also, aber $\frac{w_1}{p_1}$ fällt, somit gilt: $\frac{\partial V}{\partial w_1} \leq o$, $\frac{\partial V}{\partial p_1} \geq o$

zu e) und f):

$$\frac{\partial V}{\partial w_1} = - \frac{\beta h(p_1)(- d(\cdot)) \frac{w_1}{p_1} \cdot \frac{1}{F''(\cdot)} \cdot \frac{1}{p_1}}{\beta h(p_1)\, d(\cdot)} < o$$

$$\frac{\partial V}{\partial p_1} = - \frac{\beta h'(p_1)(1 - D(\cdot)) - 1 + \left(- d(\cdot) \frac{w_1}{p_1} \cdot \frac{1}{F''(\cdot)} (- \frac{w_1}{p_1^2}) \right) \cdot \beta h(p_1)}{\beta h(p_1)\, d(\cdot)} > o$$

wenn $\beta h'(p_1) \leq 1$.

$$\frac{\partial V}{\partial w_1} = - \frac{- \beta h(p_1)\, d(\cdot)\, F'(\cdot) \left(- \frac{m_o}{w_1^2} \right)}{\beta h(p_1)\, d(\cdot)} < o$$

$$\frac{\partial V}{\partial p_1} = - \frac{\beta h'(p_1)(1 - D(\cdot)) - 1}{\beta h(p_1)\, d(\cdot)} \geq o \quad \text{für} \quad \beta h'(p_1) \leq 1$$

Damit erhalten wir also:

$\frac{\partial V}{\partial w_1} \leq o$ und $\frac{\partial V}{\partial p_1} \geq o$ wenn die Preiserwartung h nicht zu stark anwächst, d.h. $\beta h(p_1) \leq 1$ und die Produktionsfunktion F der Bed. $R_R^F \leq 1$ genügt, die Ableitungen hängen in diesem Fall also sehr stark von den Erwartungen und der Technologie ab.

Wir untersuchen nun noch

$$\frac{\partial V}{\partial g_o} \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial a} \quad \text{und} \quad \frac{\partial V}{\partial m_o} \quad .$$

$$\frac{\partial V}{\partial g_o} = \begin{cases} o & \text{a), d)} \\ 1 > o & \text{b)} \\ > o & \text{c), e), f)} \end{cases}$$ wie man sofort sieht,

also gilt immer $\frac{\partial V}{\partial g_o} \geq o$

$$\frac{\partial V}{\partial m_o} = \begin{cases} o & \text{a) - e)} \\ - \dfrac{\beta h(p_1)(- d(\cdot))\, F'(\cdot)\, \frac{1}{w_1}}{\beta h(p_1)\, d(\cdot)} & > o \end{cases},$$

also $\frac{\partial V}{\partial m_o} \geq o$

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \begin{cases} o & a), b), d) \\ < o & c), e), f) \end{cases} \text{, somit } \frac{\partial V}{\partial a} \leq o \text{ ,}$$

bei wachsender Preiserwartung wird also weniger oder dieselbe Menge verkauft.

Veränderung der Erwartung bzgl. Rationierung

Wir nehmen nun an, daß die Rationierung stärker wird

Lemma 6:

Erwartet die Firma, stärker rationiert zu werden, so wird nie weniger verkauft und nie mehr Arbeit nachgefragt.

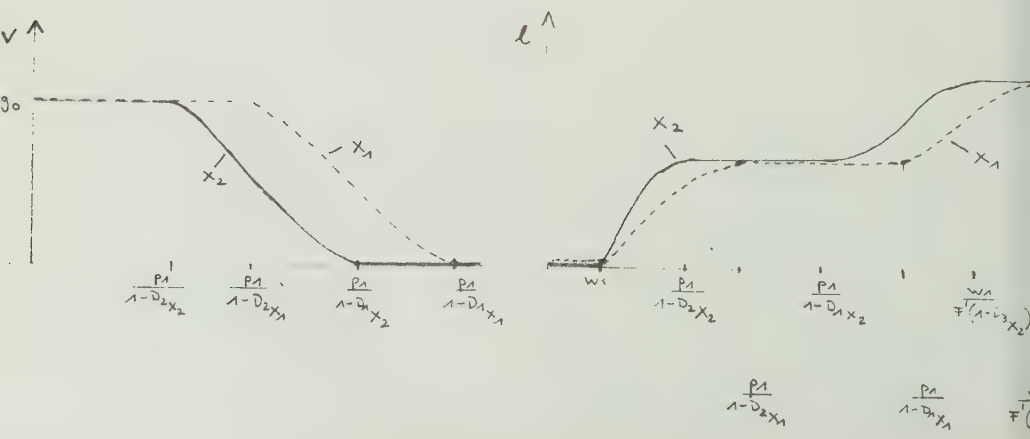
Beweis: x_1 sei eine stärkere Rationierung als $x_2 \Rightarrow D_{x_1}(x) \geq D_{x_2}$

Damit gilt für alle oben definierten D_i $1 \leq i \leq 5$: $D_{i_{x_1}} \geq D_{i_{x_2}}$

damit wird also bei derselben Preiserwartung nie weniger verkauft und nie mehr Arbeit nachgefragt, in den Bereichen, in denen $V \neq g_o$, $V \neq o$, $V \neq \frac{w_1}{p_1} F'^{-1}(\frac{w_1}{p_1})$ $(1 \neq o$, $\neq F'^{-1}(\frac{w_1}{p_1})$, $\neq \frac{m}{w}$

wird i.a. sogar mehr verkauft und weniger Arbeit nachgefragt.

Wir betrachten etwa Fall 2, (mit $F'(o) > \frac{w_1}{p_1}$, $m_o > w_1 F'^{-1}(\frac{w_1}{p_1})$)



Lemma 7:

Es gelte für h : h ist konkav und monoton wachsend.

Dann gilt: $(\lambda > 1)$

$l(\lambda p_1 , \lambda w_1) \leq l(p_1, w_1)$

und in Fall 1:

$V(\lambda p_1, \lambda w_1) \geq V(p_1, w_1)$ und

$V(\lambda p_1, \lambda w_1) = V(p_1, w_1)$, $l(\lambda p_1, \lambda w_1) = l(p_1, w_1)$ wenn $h(p_1) = ap_1$

Also bei linearer Preiserwartung bleiben Arbeit und Verkauf in Fall 1 gleich. Bei proportional wachsenden Preisen und Löhnen nimmt die Nachfrage nach Arbeit also nicht zu und in Fall 1 der Verkauf nicht ab. Im Fall 2) läßt sich für den Verkauf keine eindeutige Aussage machen, es gilt nur bei der Erwartung $h(p_1) = ap_1$:

$V(\lambda p_1, \lambda w_1) \leq V(p_1, w_1)$

Beweis :

Wegen der Konkavität und Monotonie gilt $h(ap_1) \leq ah(p_1) \quad \forall\, a > 1$.

Der weitere Beweis vollzieht sich analog zu Lemma 5 , indem man alle möglichen Fallunterscheidungen für l und V betrachtet.

Zusammenfassung :

In diesem Abschnitt wurden die Entscheidungen eines Produzenten, der nicht mehr nur atemporär behandelt wird, näher analysiert. Die Einführung der Unsicherheit über morgige Absatzbeschränkungen führte zu " einer Glättung " des Güterangebotes V : Im Gegensatz zum Fall der Sicherheit, in dem V im allgemeinen unstetig ist, ist V nun stetig, Wie zu erwarten wirkt sich die Unsicherheit darin aus, daß in den meisten Fällen heute mehr Output verkauft und weniger Arbeit nachgefragt wird. Aufgrund der temporären Behandlung kommt der Preiserwartungsfunktion hier besondere Bedeutung zu : Ist diese sehr positiv, so überlagert sie den Unsicherheitseffekt und es ist möglich, daß mit steigendem Preis weniger verkauft wird. Um den umgekehrten Effekt zu erreichen, muß man die Preiserwartungen h und interessanterweise auch die Menge der Produktionsfunktionen F einschränken : h darf nicht zu elastisch sein (Elastizität kleiner gleich Eins) und F muß einer Bedingung genügen, die ähnlich dem relativen Risikoaversionsmaß bei einer Nutzenfunktion ist. Damit haben wir eine gewisse Symmetrie zwischen Konsum- und Produktionssektor erhalten : Bedingungen an die Nutzenfunktion u und die Preis-Lohn-Erwartungen (f,g) stehen solche an die Produktionsfunktion F und die Preiserwartung h gegenüber. Daß bei höherem Lagerbestand mehr verkauft wird, ist wegen der Unsicherheit einsichtig, doch auch, daß die Auswirkungen auf die Arbeitsnachfrage nicht eindeutig sind. Der Effekt ist positiv, wenn schon der Gesamtbestand zur Arbeitsfinanzierung aufgewandt wird, da die Firma hier nicht genügend liquide Mittel besitzt ; andererseits ist er negativ, wenn dieser Fall nicht eintritt : Hier können die Profite eventuell gesteigert werden, wenn man weniger Arbeit nachfragt - und damit auch geringere Kosten hat. Daß bei Verstärkung der morgigen Rationierung im allgemeinen mehr verkauft und weniger Arbeit nachgefragt wird, ist ebenfalls plausibel.

III Gleichgewichtssätze

Wir wollen im folgenden Sätze über Existenz und Eindeutigkeit Temporärer Gleichgewichte beweisen.
Die Konsumenten maximieren jeweils ihren erwarteten Nutzen.
Im Satz 6 wird der Produktionssektor atemporär behandelt, die j-te Firma besitzt eine Produktionsfunktion F_j, mit deren Hilfe aus Arbeit Konsumgüter produziert werden. Ziel ist es, die Profite zu maximieren. Damit gilt

Satz 6:

.1) Gegeben sei eine Ökonomie mit n C^1-Konsumenten, also beschrieben durch $(u_i, m_{o_i}, \bar{l}_i, a_i, f_i, g_i)_{i \in I}$ und m Produzenten, beschrieben durch $(F_j)_{j \in J}$.

Gilt für jede Produktionsfunktion F_j:
F_j ist zweimal stetig differenzierbar, $F_j' > 0$, $F_j'' < 0$
$F_j(0) = 0$, $\lim_{z \to \infty} F_j'(z) = 0$, $0 < F_j'(0) < \infty$, für wenigstens ein j_o : $\lim_{z \to \infty} F_{j_o}(z) = \infty$ und für wenigstens einen Konsumenten i

$m_{o_i} > 0$

$\lim_{p \to o} f_i'(p) = \tau > 0$, wenn $f(0) = 0$
und $u_2(d, \infty) = 0$ für $d \geq 0$
so existiert ein temporäres Gleichgewicht.

2) Haben alle Konsumenten statische Erwartungen, also $f_i(p) = a_i p$, $g_i(w) = b_i w$, $a_i, b_i > 0$ so ist das Gleichgewicht auch eindeutig.

Beweis:

Wir werden die Voraussetzungen des Gleichgewichtssatzes aus Hildenbrand [17] , siehe auch Anhang, Satz 1, nachweisen.

Sei $F(l) = \sum_{j \in J} F_j(l)$, $C_1(p_1,w_1) = \sum_{i \in I} c_{1_i}(p_1,w_1)$

$l(p_1,w_1) = \sum_{i \in I} \bar{l}_i$

F erfüllt alle Annahmen an den Produktionssektor

Im Konsumsektor ist zu zeigen:

L1) L2)

1) $o < l(p_1,w_1) \leq \bar{l}$, l differenzierbar, $\frac{\partial l}{\partial w_1} \geq o$

Da wir für jedes Individuum konstantes Arbeitsangebot vorausgesetzt haben, sind diese Bedingungen erfüllt.

C2) C4) , $C(p_1, w_1)$ stetig, $\lim_{\substack{p_1 \to o \\ w_1 \to o}} C_1(p_1,w_1) = \infty$

Nun sind nach Satz 1 alle C_{1_i} stetig, mithin auch C_1 , nach Lemma 4 , gilt für Individuum i_o

$\lim_{\substack{p_1 \to o \\ w_1 \to o}} C_{1_{i_o}}(p_1,w_1) = \infty$

daher gelten diese Eigenschaften auch für den Gesamtkonsum C_1.

Mithin existiert ein temporäres Gleichgewicht.

Eindeutigkeit:

Hier ist zusätzlich nachzuweisen:

L3) $l(\lambda p_1, \lambda w_1) \geq l(p_1,w_1)$ $\lambda > 1$

C3) $C_1(\lambda p_1, \lambda w_1) < C_1(p_1, w_1) \qquad \lambda > 1$

C2') C_1 ist differenzierbar und $\frac{\partial C_1}{\partial p_1} < 0 \quad , \quad \frac{\partial C_1}{\partial w_1} \geq 0$

Da das Arbeitsangebot konstant ist, ist L3 erfüllt.
C3) gilt für jedes Individuum, damit auch für C_1 nach Satz 3 , wenn die Erwartungen statisch sind.

In unserem vorliegenden Fall können wir auf den Nachweis von C2' verzichten, denn :
Das Arbeitsangebot ist konstant, damit erhalten wir als Lösung von $K_2(p_1, w_1) := -l^*(p_1, w_1) + \bar{l} = 0$ eine Gerade $w(p_1) = K \cdot p_1$, $K \in \mathbb{R}_{++}$, $\bar{l} := \sum_{i \in I} \bar{l}_i$.
l^* ist der optimale Arbeitsinput des Produzenten ($l^* = F'^{-1}(\frac{w_1}{p_1})$ oder $l^* = 0$) . Damit neben (p_1^*, w_1^*) ein weiteres Gleichgewicht existierte, müßte die Lösungskurve von $K_1(p_1, w_1) := -F(l^*) + C_1(p_1, w_1)$ $K \cdot p_1$ ein weiteres Mal schneiden oder berühren, Wegen C3) und $F(l^*(p_1, w_1)) = F(l^*(\lambda p_1, \lambda w_1))$ $\lambda > 1$ ist das aber unmöglich.

Bemerkung:

Daß bei relativ schwachen Annahmen an den Konsumsektor (ein bestimmtes Randverhalten von u , positiver Erstgeldbestand und eine schwache Forderung an die Preiserwartung für wenigstens einen Konsumenten) ein Gleichgewicht existiert, liegt an der extrem einfachen

Behandlung des Produktionssektors. Betrachten wir etwa (V, l^N, π) mit V = Verkauf, l^N Arbeitsnachfrage und π Profit (Endgeldhaltung), dann ist in diesem Fall

$$V = FF'^{-1}(\frac{w}{p})$$

$$l^N = F'^{-1}(\frac{w}{p}) \quad , \quad \pi = p[FF'^{-1}(\frac{w}{p}) - \frac{w}{p} F'^{-1}(\frac{w}{p})]$$

Indem man (p, w) geeignet wählt, sieht man, daß V, l^N, π zwischen 0 und ∞ variieren können, während die Entscheidungen des Konsumenten oft auf endliche Intervalle beschränkt sind : Betrachten wir Konsumenten mit Nutzenfunktionen wie in Beispiel 3 und Lohnerwartung $g(w) > \alpha w \quad \forall\, w > 0$ so erhalten wir analog zu dem Beispiel in Grandmont [11], daß $m_1 < \frac{\alpha}{1+\alpha} \cdot m_o < m_o \quad \forall\, (p, w)$, d.h. daß der "Geldmarkt" allein seitens der Konsumenten nie ins Gleichgewicht kommt (daher existiert bei Grandmont, der eine reine Tauschwirtschaft betrachtet, in einem solchen Fall kein Gleichgewicht). Durch die spezielle Form des Produktionssektors erhält man aber in unserem Fall ein Gleichgewicht. -

Die Eindeutigkeit in Satz 6 hängt sehr stark von den "statischen Erwartungen" ab, sind diese beliebig, so existieren i.a. mehrere Gleichgewichte, wie Beispiel 6 zeigt:

Sei $n = m$, alle Konsumenten seien identisch, mit der Spezifikation, benutzt in Beispiel 1 ; alle Produzenten mögen dieselbe Produktionsfunktion F besitzen mit $F(z) = z^{\beta_1}$, $0 < \beta_1 < 1$.

Damit gilt für den optimalen Arbeitsinput:

$$z^* = \left(\frac{w_1}{\beta_1 p_1}\right)^{\frac{1}{\beta_1 - 1}} \quad \text{, für den Output} \quad Y^* = \left(\frac{w_1}{\beta_1 p_1}\right)^{\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}}$$

Es sei $\bar{l}_i = 1$. Da wir wieder lineare Preiserwartungen und $g(w_1) = w_1^2$ als Lohnerwartung betrachten, gilt mit $K := \beta A^{\delta}$ für den individuellen Konsum:

$$c_1 = \begin{cases} \dfrac{w_1 + m_o}{p_1} & w_1 + m_o < K w_1^2 \\ \dfrac{K}{1+K}\left(\dfrac{m_o + w_1 + w_1^2}{p_1}\right) & w_1 + m_o \geq K w_1^2 \end{cases}$$

Wir spezifizieren nun:

$m_o = 3$, $\beta_1 = \frac{3}{5}$, $K = \frac{1}{2}$ (durch geeignete Wahl von A ist das immer möglich)

Beh.: Es gibt 3 temporäre Gleichgewichte, nämlich

$G_1 = (5/3, 1)$, $G_2 = (5, 3)$, $G_3 = (\frac{15}{2}, \frac{9}{2})$

Bew: Es gilt (wegen $m = n$)

$$\bar{l} = z^*$$
$$c_1 = y^*$$

$$\bar{l} = z^* \Leftrightarrow 1 = \left(\frac{w_1}{\beta_1 p}\right)^{\frac{1}{\beta_1 - 1}} \Rightarrow w_1 = \beta_1 p_1$$

damit ist $1 = c_1(p_1^*, w_1^*)$

Nun gilt für $w_1 = 1$ und $w_1 = 3$: $w_1 + 3 \geq \frac{w_1^2}{2}$

Somit $c_1(5/3,\ 1) = \frac{1}{3}\ (\frac{3 + 1 + 1}{5/3}) = 1$

$c_1(5,\ 3) = \frac{1}{3}\ (\frac{3 + 3 + 9}{5}) = 1$

für $w = 4{,}5$ gilt: $w_1 + 3 < \frac{w_1^2}{2}$ und $c_1(\frac{15}{2},\ \frac{9}{2}) = \frac{\frac{9}{2} + \frac{6}{2}}{\frac{15}{2}} = 1$

Fordert man - wie Grandmont - daß aufgrund der Abhängigkeit von den vergangenen Preisen und Löhnen die morgige Entwicklung nicht zu stark von der heutigen Situation abhängen darf, so ist i.a. das temporäre Gleichgewicht auch nicht mehr eindeutig. Wir demonstrieren das an einem Beispiel, in dem $(p_2,\ w_2)$ vollkommen unabhängig von $(p_1,\ w_1)$ ist:

Beispiel 7

Die Ökonomie bestehe aus n identischen Konsumenten, beschrieben durch $(u,\ a,\ m_o,\ p_2,\ w_2)$, dabei sei $a = 1$ und $u(c_1,\ c_2) = -c_1^{-1} - c$ und n identischen Produzenten, beschrieben durch die Produktionsfunktion $F(l) = \sqrt{l}$.

Dann gilt:

$$c_1(p_1,\ w_1) = \frac{\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}\ (w_1\bar{l} + w_2\bar{l} + m_o)}{p_1 + p_1\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}} = \frac{w_1\bar{l} + w_2\bar{l} + m_o}{\sqrt{p_1p_2} + p_1}$$

somit

$$c_1(\lambda p_1,\ \lambda w_1) = \frac{\lambda w_1\bar{l} + w_2\bar{l} + m_o}{\sqrt{\lambda}\ \sqrt{p_1p_2} + \lambda p_1}$$

wenn $\sqrt{p_2}\ (w_1\bar{l} + m_o) > \sqrt{p_1}\ w_2\bar{l}$, denn dann ist $m_1(p_1, w_1)$ positiv und

$$m_1(p_1, w_1) = \frac{\sqrt{p_2}\ (w_1\bar{l} + m_o) - \sqrt{p_1}\ w_2\bar{l}}{\sqrt{p_2} + \sqrt{p_1}}$$

Sei nun $\bar{l} = 1$, $p_2 = 4$, $w_2 = m_o = 1$

Beh.: $(p_i^*, w_i^*) = (12 \pm 8\sqrt{2}\ ,\ 6 \pm 4\sqrt{2})$ $\quad i = 1,2$

sind temporäre Gleichgewichte.

Da $l^* = (\frac{p_i^*}{2w_i})^2 = 1 = \bar{l}$, ist der Arbeitsmarkt im Gleichgewicht.

Man zeigt dann, daß $y^* = (\frac{p_i^*}{2w_i^*}) = 1 = c_1(p_i^*, w_i^*)$ erfüllt ist, wir haben damit 2 Gleichgewichte gefunden, da auch $m_1(p_i^*, w_i^*) > o$ gilt.

Allgemein läßt sich bei (p_2, w_2) unabhängig von (p_1, w_1) zeigen, daß immer wenigstens 2 Gleichgewichte existieren, wenn die Nutzenfunktion u additiv und die relative Risikoaversion $r > 1$ ist; bei $r \leq 1$ ist das Gleichgewicht eindeutig. Natürlich ist die Nicht-Eindeutigkeit auch auf Fälle zu übertragen, in denen (p_2, w_2) zwar von (p_1, w_1) abhängen, aber in einem Kompaktum K liegen. Daher ist die Grandmont'sche "Tightness-Bedingung" zwar sehr elegant was die Existenz von Gleichgewichten angeht, jedoch scheint sie weniger geeignet, wenn man die Eindeutigkeit erzwingen will.

Aufgrund von Satz 2 läßt sich der zweite Teil von Satz 6 so umformulieren :

Lemma 8

Seien die Voraussetzungen wie in Satz 6.1 . Dann ist das Gleichgewicht eindeutig, wenn kein Konsument der Geldillusion unterliegt. ———

Wir verallgemeinern jetzt und nehmen an, daß der Produktionssektor nicht mehr atemporär behandelt wird, sondern wie im vorangehenden Kapitel II. Um die Existenz eines temporären Gleichgewichtes zu zeigen, muß das "Randverhalten" der Nachfrage untersucht werden. Das geschieht in den beiden folgenden Lemmata , in denen wir voraussetzen, daß der betrachtete Konsument (Lemma 9) und der Produzent (Lemma 10) jeweils vom C1-Typ sind .

Lemma 9:

Sei $d_n = (w_1^n, p_1^n)$ eine Folge mit $\| d_n \| \to \infty$ und $\lim_n \frac{w_1^n}{p_1^n} > 0$

Folgende Voraussetzungen seien erfüllt:

a) $q < 1$, $u_2(c, o) = \infty \quad \forall \quad c > o$

b) $\lim_{p_1 \to \infty} \frac{f(p_1)}{p_1} =: K < \infty$, $\lim_{p_1 \to \infty} f(p_1) > o$

c) Gilt für d_n : $\lim_n \frac{w_1^n}{p_1^n} < \infty$ so auch $\lim_n \frac{g(w_1^n)}{f(p_1^n)} <$

Dann gilt: $\lim_n \| (c_1^n, m_1^n) \| = \infty$

mit $c_1^n = c_1(p_1^n, w_1^n)$, $m_1^n = m_1(p_1^n, w_1^n)$

Beweis :

Ann.: Die Behauptung ist falsch. Dann gibt es eine Teilfolge

(O dieselbe Bezeichnung)

mit $\lim_n c_1^n =: K_1$, $\lim_n m_1^n =: K_2$, $K_1, K_2 < \infty$

Nun sei $\lim_n \frac{w_1^n}{p_1^n} = \infty$;

Aus der Budgetgleichung erhalten wir dann, da c_1^n und m_1^n beschränkt sind :

$$\lim_n c_1^n + \lim_n \frac{m_1^n}{p_1^n} = K_1 + K_3 = \lim_n \frac{w_1^n}{p_1^n} \bar{l} + K_4 = \infty$$

$$0 \leq K_3, K_4 < \infty$$

für $\lim_n p_1^n > 0$; und $\lim_n m_1^n = \lim_n w_1^n \bar{l} + m_o = \infty$ für $\lim_n p_1^n = 0$

Sei nun $\lim_n \frac{w_1^n}{p_1^n} = a$, $a < \infty$. Aufgrund von

c) gilt dann auch $\lim_n \frac{g(w_1^n)}{f(p_1^n)} < \infty$, damit

$$\lim_n A = \lim_n \frac{m_1^n + g(w_1^n)\, l}{f(p_1^n)} =: \bar{A} < \infty$$

Ist $\lim_n f(p_1^n) < \infty$, so muß wegen c) auch $\lim_n g(w_1^n) < \infty$ sein.

Wir unterscheiden nun 2 Fälle :

a) $\lim_n f(p_1^n) = \infty$ Damit ist $\lim_n B = \lim_n \frac{m_1^n}{f(p_1^n)} = 0$

Wir erhalten weiterhin :

$$\lim_n \left(c_1^n + \frac{m_1^n}{p_1^n}\right) = K_1 = \lim_n \left(\frac{w_1^n \bar{l}}{p_1^n} + \frac{m_o}{p_1^n} \right) = a\bar{l} > o$$

Weil $\bar{A} < \infty$ und $u_{12} \geq o$, gilt damit

$o \leq u_1(K_1, o) \leq u_1(K_1, \bar{A}) < \infty$.

Zusätzlich gilt nun $q < 1$, damit aufgrund von Gleichung [**6**]:

$$o \leq q(Ku_1(K_1, \bar{A}) - u_2(K_1, \bar{A})) + (1 - q)(Ku_1(K_1, o) - \underbrace{u_2(K_1, o)}_{\infty}) < o$$ #

b) Nun sei $\lim_n f(p_1^n) = \mu$, $o < \mu < \infty$
dann ist wieder $\bar{A} < \infty$, $\lim B = \lim_n \frac{m_1^n}{f(p_1^n)} =: \bar{B} \geq o$

aber $\lim_n \frac{f(p_1^n)}{p_1^n} = 0$

Aus denselben Gründen wie oben gilt wieder

$o \leq u_1(K_1, \bar{B}) \leq u_1(K_1, \bar{A}) < \infty$, damit

$o \leq q(- u_2(K_1, \bar{A})) + (1 - q)(- u_2(K_1, \bar{B})) < o$ #

Also gilt in jedem Fall:

$$\lim_n \| (c_1^n, m_1^n) \| = \infty$$

Bemerkung:

Die in der Literatur [11, 12 ,13, 27] benutzten "tight expectation
sind in dem obigen Lemma enthalten, da $\lim f(P_1) < \infty$, somit

$f(p_1) \in [\, a, b \,]$ $a > 0$, $b < \infty$ zugelassen ist.

Daß die Unsicherheit benötigt wird $(q < 1)$, sieht man an dem Beispiel 3. Ist $q = 1$, das Individuum also morgen sicher beschäftigt und (d_n) so, daß $\| d_n \| \to \infty$ mit $\lim_n \frac{w_1^n}{p_1^n} = a < \infty$, so gilt für $g(w_1) > \alpha w_1$:

$$\lim_n \| (c_1^n, m_1^n) \| < \infty .$$

Im weiteren sei m_1 die Geldhaltung des Produzenten am Ende der 1. Periode

Lemma 1o:

Gegeben sei die Firma j_o, es gelte $\lim_{l \to \infty} F'_{j_o}(l) = o$

$d_n = (w_1^n, p_1^n)$ sei eine Folge mit $\| d_n \| \to \infty$ und $\lim_n \frac{w_1^n}{p_1^n} = o$.

Ist dann die Struktur wie unter 1) $(p_1 V \geq w_1 l)$ definiert, so gilt, unabhängig von der Preiserwartungsfunktion $h(p_1)$:

$\lim_n \| (V, l^N, m_1) \| = \infty$

Ist die Struktur wie unter 2) $(m_o \geq w_1 l)$ und gilt

$$\lim_{p_1 \to \infty} \frac{h(p_1)}{p_1} \leq 1 \quad , \quad \lim_{p_1 \to \infty} h(p_1) > 0$$

so erhält man $\lim_n \| (V, l^N, m_1) \| = \infty$

Beweis:

Da die Firma unsicher ist über mögliche Rationierungen, sind V, l^N und damit auch m_1 stetig. Wir beweisen nun zuerst die folgende Aussage:

Beh.: Sei d_n wie oben mit $\| d_n \| \to \infty$. Gilt $V(d_n) = g_o$ $\forall$ $n \geq n_o$, so ist $\lim_n \| (l^n, m_1^n) \| = \infty$

Beweis: Die Firma hat die Budgetgleichung

$$p_1 V + m_o = w_1 l + m_1 \qquad \forall \ (p_1, w_1) >> 0$$

Ann.: Die Behauptung ist falsch, dann gibt es eine Teilfolge (dieselbe Bezeichnung) mit $\lim_n \|(l^n, m_1^n)\| = K < \infty$, also l und m_1 bleiben beschränkt. Wir multiplizieren nun mit $\frac{1}{\|(p_1^n, w_1^n)\|}$

und erhalten aus Stetigkeitsgründen im Limes:

$$\lim_n \frac{p_1^n}{\|(p_1^n, w_1^n)\|} V(p_1^n, w_1^n) = o \ , \text{ somit } \lim_n V(d_n) = o \quad \#$$

Nun gilt für die Prod-Funktion: $F'(o) > o$, also für n hinreichend groß, $F'(O) > \frac{w_1^n}{p_1^n}$, da $\frac{w_1^n}{p_1^n} \to O$.

Beschränken wir uns nun auf Fall 1), so ist in allen bzgl. $h(p_1)$ auftretenden Fällen $V = g_{o_n}$ oder $l = F'^{-1}(\frac{w_1}{p_1})$. Da aber $F'(\infty) = o$, gilt $\lim_n F'^{-1}(\frac{w_1}{p_1^n}) = \infty$, also somit in jedem Fall: $\lim_n \|(l^n, m_1^n)\| = \infty$

Nun zu Fall 2)

Sei d_n wieder eine Folge mit $\|d_n\| \to \infty$ und $\lim_n \frac{w_1^n}{p_1^n} = o$

Für n hinreichend groß gilt dann wieder $F'(o) > \frac{w_1^n}{p_1^n}$

Wir unterscheiden nun in

a) $\lim_n w_1^n = o$

b) $\lim_n w_1^n > o$

Zu a) Wir haben hier, unabhängig davon, ob $m_o \gtrless w_1 F'^{-1}(\frac{w_1}{p_1})$:

$$V = g_o$$

oder $\quad 1 = F'^{-1}(\frac{w_1}{p_1})$

oder $\quad 1 = \frac{m_o}{w_1}$

oder $\quad 1$ löst die Gleichung $\quad \frac{w_1}{F'(1)} = \beta h(p_1)\ (1 - D(g_o + F(1))$

In den ersten drei Fällen gilt dann schon $\lim_n \|(l^n, m_1^n)\| = \infty$

Zu 4:

Ann.: $\lim_n l(d_n) = K < \infty$, damit

$\lim_n \left(\frac{w_1{}^n}{\beta h(p_1{}^n)}\right) = 0 = F'(K)(1-D(g_o+F(K)) > 0$ also $\quad l(d_n) \to \infty$

Zu b) $\lim_n w_1^n > 0$. Damit gilt $w_1^n F'^{-1}(\frac{w_1^n}{p_1^n}) \to \infty$, also tritt für großes n nur $m_o \leq w_1^n F'^{-1}(\frac{w_1^n}{p_1^n})$ auf. Ist nun $\lim_{p_1 \to \infty} \frac{\beta h(p_1)}{p_1} \leq 1$,

so gilt $\lim_n V(d_n) = g_o$, damit haben wir also in jedem Fall erhalten:

$\lim_n \|(l^n, m_1^n)\| = \infty$.

Satz 7:

Die Ökonomie bestehe aus $|I|$ Konsumenten, charakterisiert durch $(u_i, f_i(p_1), g_i(w_1), q_i, m_{o_i})_{i\in I}$ und $|J|$ Firmen beschrieben durch $(g_{o_j}, F_j(l), h_j(p_1), D_j(X), \beta_j))_{j\in J}$, die jeweils alle vom C1-Typ sind.

Gilt dann für wenigstens einen Konsumenten i_o :

a) $m_{o_{i_o}} > o$, $\lim_{p_1 \to o} f'_{i_o}(p_1) = \sigma > o$ wenn $f(o) = o$, sowie

$u_{2_{i_o}}(c,\infty) = 0 \quad \forall\, c \geq 0$

und für wenigstens ein i_1 :

b) $q_{i_1} < 1$, $u_{2_{i_1}}(c, o) = \infty \qquad \forall\ c > o$

c) $\lim_{p_1\to\infty} \frac{f_{i_1}(p_1)}{p_1} =: K < \infty$, $\lim_{p_1\to\infty} f_{i_1}(p_1) > o$

d) Für jede Folge d_n , $\| d_n\| \to \infty$, $d_n = (w_1^n, p_1^n)$ mit $\lim_n \frac{w_1^n}{p_1^n} < \infty$

gilt auch $\lim_n \frac{g_{i_1}(w_1^n)}{f_{i_1}(p_1^n)} < \infty$

und für wenigstens einen Produzenten j_o

e) $\lim_{l\to\infty} F'_{j_o}(l) = 0$ und in Fall 2 zusätzlich :

f) $\lim_{p_1\to\infty} \frac{h(p_1)}{p_1} \leq 1$, $\lim_{p_1\to\infty} h(p_1) > o$, so existiert ein temporäres Gleichgewicht.

1) Bemerkungen: Beim Konsumenten wie beim Produzenten sind damit Erwartungen zugelassen, die vom heutigen Preis p_1 und

Lohn w_1 unabhängig sind.

2) Ist die Nutzenfunktion U_{i_1} additiv, so kann Bedingung d) wegfallen.

Daß sie bei allgemeiner Nutzenfunktion notwendig ist, zeigt das folgende Gegenbeispiel 8 : (u ist zwar nur konkav, und nicht strikt konkav, trotzdem ist die Nachfrage eindeutig und der Satz 1 anwendbar) .

Sei $u(c_1, c_2) = \sqrt{c_1 \cdot c_2}$, $q = \frac{1}{2}$, $g(w_1) = w_1^2$, $f(p_1) = p_1$

Damit ist

$$m_1 = \frac{(w_1\bar{l} + m_o)^2}{g(w_1)\bar{l} + 2(w_1\bar{l} + m_o)} = \frac{(w_1\bar{l} + m_o)^2}{w_1^2\bar{l} + 2w_1\bar{l} + 2m_o}$$

$$c_1 = \frac{(w_1\bar{l} + m_o)(w_1\bar{l} + m_o + w_1^2\bar{l})}{p_1(w_1^2\bar{l} + 2w_1\bar{l} + 2m_o)}$$

Ist nun $w_1 = ap_1$, so sieht man, daß $\lim_{w_1 \to \infty} m_1 < \infty$, $\lim_{w_1 \to \infty} c_1 < \infty$

Die Produktion werde nun durch Fall 1) beschrieben. In einem Gleichgewicht muß gelten:

$c_1(p_1, w_1) = V(p_1, w_1)$

$\bar{l} = l^N(p_1, w_1)$

Wir wählen $h(p_1) = p_1$, damit gilt $V(p_1, w_1) = g_o$.

Sei $\beta = \bar{l} = 1 = g_o$. Für l^N erhalten wir als mögliche Fälle

$l^N = o$

$l^N = \frac{p_1}{w_1}$

l^N löst $\frac{w_1}{p_1} = F'(l)(1 - D(F(l))$

Damit der Arbeitsmarkt im Gleichgewicht ist, muß damit gelten:

$p_1 = w_1$ oder $\frac{w_1}{p_1} = F'(1)(1 - D(F(1)))$.

Nun seien F und D so gewählt, daß $F'(1)(1 - D(F(1))) = 1$

damit also $p_1 = w_1$.

Einsetzen liefert

$$1 = \frac{(w_1 + m_o)(w_1 + m_o + w_1^2)}{w_1(w_1^2 + 2w_1 + 2m_o)} \quad \Rightarrow \quad w_1^2(1 - m_o) = m_o^2$$

Damit existiert für $m_o > 1$ kein Gleichgewicht, während natürlich bei $U(c_1, c_2) = \sqrt{c_1} + \alpha\sqrt{c_2}$ unter den obigen Bedingungen - ohne d) - ein Gleichgewicht existiert.

Beweis:

Wie wir schon gesehen haben, sind c_{1_i}, m_{1_i} und auch V_j, l_j und damit m_j stetig, letztere, da die Firmen unsicher sind bzgl. der morgigen Nachfrage. Nun seien

$\xi_i(p_1,w_1) := (c_{1_i}(p_1,w_1), - \bar{l}_i, m_{1_i}(p_1,w_1) - m_{o_i})$,

$\xi_j(p_1,w_1) := (- V_j(p_1,w_1), l_j(p_1,w_1), m_j(p_1,w_1) - m_{o_j})$ die "net trades" des Konsumenten i bzw. des Produzenten j .

Gesucht wird dann (p_1^*, w_1^*) sodaß

$\xi(p_1^*, w_1^*) = o$ mit $\xi(p_1,w_1) := \sum_{i \in I} \xi_i(p_1,w_1) + \sum_{j \in J} \xi_j(p_1,w_1)$.

Nun haben wir in den Lemmata 4 , 9, 1o das Randverhalten untersucht. Es reicht, das jeweils für ein Individuum zu zeigen. Aufgrund dieser Ergebnisse vollzieht sich der weitere Beweis analog zu Theorem 1 in [12]. Es ist nur noch zu zeigen, daß für den Gleichgewichtspunkt (p_1^*, w_1^*) gilt: $w_1^* > o$.

Denn nach Beweis gilt schon $p_1^* > o$. Nehmen wir nun $w_1^* = o$ an. Wie man jedoch aus allen möglichen Unterscheidungen in den Fällen 1) und 2) sieht, heißt das, daß $l^N = \infty$ ist. Das ist aber ein Widerspruch zur Beschränktheit von $\Sigma \bar{l}_i$. Somit ist $(p_1^*, w_1^*) >> o$ und der Satz damit bewiesen.

Bemerkung :

Wir haben schon anfangs erwähnt (S.), daß wir die Erwartungen der Konsumenten verallgemeinern können auf Funktionen f und g, die vom Preis p_1 und Lohn w_1 gemeinsam abhängen.

Wir fordern dazu :

$f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$, $(p_1,w_1) \to f(p_1,w_1)$; $g : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$, $(p_1,w_1) \to g(p_1,w_1)$ sind stetig

f ist auf $\mathbb{R}_{++}^2$ stetig differenzierbar und $f(p_1,w_1) > 0$, für $p_1 > 0$, $w_1 \geq 0$.

Der Satz läßt sich dann vollkommen analog beweisen, wenn wir die - die Erwartungen betreffenden - Voraussetzungen von Satz 7 wie folgt modifizieren :

a) Für jede Folge (p_1^n, w_1^n)

mit $(p_1^n, w_1^n) \to (0, K_1)$, $0 \leq K_1 < \infty$,

gilt $\lim_n \frac{\partial f}{\partial p_1} (p_1^n, w_1^n) > 0$

c) Für jede Folge $d_n = (p_1^n, w_1^n)$

mit $p_1^n \to \infty$ gilt :

$$\lim_n \frac{f(p_1^n, w_1^n)}{p_1^n} = K < \infty \quad , \quad \lim_n f(p_1^n, w_1^n) > 0$$

d) Für jede Folge $d_n = (p_1^n, w_1^n)$, $\| d_n \| \to \infty$

mit $0 < \lim_n \frac{w_1^n}{p_1^n} < \infty$ gilt :

$$\lim_n \frac{g(p_1^n, w_1^n)}{f(p_1^n, w_1^n)} < \infty$$

Wir haben diese Verallgemeinerung jedoch nicht vorgenommen aus dem anfangs schon benannten Grunde und weil wir neben der Existenz auch an der Eindeutigkeit eines Gleichgewichtes interessiert sind. Dazu die folgende Aussage :

Lemma 11

Gilt zusätzlich : Haben alle Konsumenten statische Erwartungen, also $f_i(p_1) = a_i p_1$, $g_i(w_1) = b_i w_1$ $\forall\, i \in I$ und gilt für alle Produzenten j :

$R_R^{Fj}(1) \leq 1$ und $h_j(p_1)$ ist konkav und monoton wachsend (also einschließlich der linearen Funktion), so ist das Gleichgewicht auch eindeutig, wenn die Firmen wie unter 1) (also $p_1 V \geq w_1 l$) agieren.

Beweis:

Wir haben schon gezeigt, daß ein Gleichgewicht existiert, d.h. es gibt (p_1^*, w_1^*) mit

$V(p_1^*, w_1^*) = c(p_1^*, w_1^*)$

$l^N(p_1^*, w_1^*) = \bar{l}$

Betrachte nun $\{(p_1,w_1) | (p_1,w_1) = \lambda(p_1^*, w_1^*) \ , \ \lambda > o\}$

Nun sei $\lambda > 1$. Dann ist $l^N(\lambda p_1^*, \lambda w_1^*) \leq \bar{l}$ (Lemma 7)

Da l^N stückweise stetig differenzierbar ist, gilt

für positives l^N : $\left.\frac{\partial l^N}{\partial w_1}\right|(\lambda_1 p_1^*, \lambda_1 w_1^*) < o$ (Lemma 5)

(Natürlich nur, soweit $\frac{\partial l^N}{\partial w_1}$ existiert, anderenfalls gehen wir zur rechts- oder linksseitigen Ableitung über).

Damit muß also die Kurve $w(p_1)$ mit $l^N(p_1, w(p_1)) - \bar{l} = o$, soweit sie überhaupt außerhalb einer Umgebung von (p_1^*, w_1^*) existiert, für $\lambda > 1$ unter oder auf der Geraden $w_1 = \frac{w_1^*}{p_1^*} p_1$ liegen, für $\lambda < 1$ oberhalb oder auf der Geraden.

Betrachten wir die Gleichung für das Konsumgut.

Für $\lambda > 1$ gilt nach Lemma 7 und Satz 3:

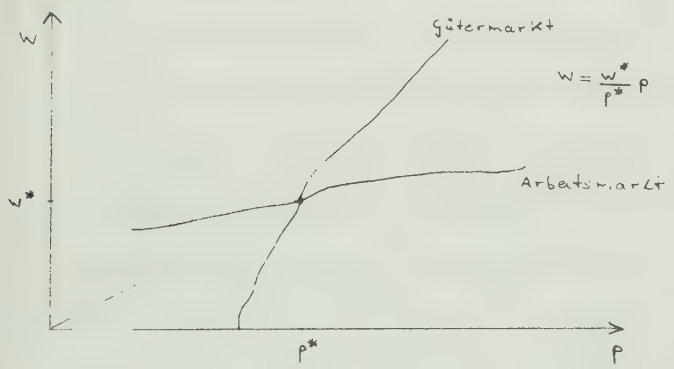
$V(\lambda p_1^*, \lambda w_1^*) \geq V(p_1^*, w_1^*) = c(p_1^*, w_1^*) > c(\lambda p_1^*, \lambda w_1^*)$

Sei $\lambda_1 > 1$ fix.

Nun gilt nach Lemma 2 bzw. 5 $\frac{\partial c_1}{\partial w_1} > 0$ und wenn $R_R^F(y) \leq 1$ $\frac{\partial V}{\partial w_1} \leq 0$

(in den Punkten, in denen c_1 bzw. V differenzierbar sind). Daher kann man wieder sagen: Die Kurve, die den Konsumgütermarkt ins Gleichgewicht bringt, muß - soweit überhaupt existent - für $\lambda > 1$ oberhalb und $\lambda < 1$ unterhalb der Geraden $w_1 = \frac{w_1^*}{p_1^*} p_1$ liegen.

Daher ist das Gleichgewicht eindeutig.



Hinreichende Voraussetzung für die Eindeutigkeit ist also, daß neben der Bedingung an die Produktionsfunktion F_j und Eins-Lohn-Preiselastizität der Konsumenten die Preiselastizität der Produzentenerwartung durch Eins nach oben beschränkt ist, d.h. die Lohn-Preiserwartungen in der Gesamtökonomie dürfen nicht inflationär sein.

Unsicherheit bzgl. Preis und Lohn

Bisher sind wir von festen Preis- und Lohnerwartungen ausgegangen. Bei gegebenen (p_1, w_1) war der Konsument sicher über den morgigen Preis und Lohn. Diese (unrealistische) Annahme wird nun aufgegeben, wir nehmen stattdessen an, daß die Erwartung eine Zufallsvariable ist. Dazu sei definiert:

$$P_i := \{(p_i, w_i) \mid (p_i, w_i) >> o\}$$

$$i = 1, 2$$

$$\overline{P}_i := \{(p_i, w_i) \mid w_i \geq 0 \ , \ p_i > 0 \}$$

$B(\overline{P}_2)$ sei die Borel σ - Algebra auf $\overline{P}_2$ und $M(\overline{P}_2)$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße, die auf dem meßbaren Raum $(\overline{P}_2, B(\overline{P}_2))$ definiert sind. Jedes Individuum ordnet nun (p_1, w_1) ein W - Maß $\mu_{(p_1, w_1)}$ zu. Da sich bei kleinen Verschiebungen von Preis und Lohn dieses Maß auch nur leicht verändern soll, müssen wir, um von der Stetigkeit dieser Zuordnung sprechen zu können, $M(\overline{P}_2)$ mit einer Topologie versehen. Wir wählen dazu die Topologie der schwachen Konvergenz von W - Maßen. Wir machen dann die folgenden Annahmen über die Erwartungsbildung:

A) Die Abbildung $\psi : \overline{P}_1 \to M(\overline{P}_2)$ ist stetig

$$(p_1, w_1) \to \mu_{(p_1, w_1)} = \psi(p_1, w_1, \cdot)$$

$\forall (p_1, w_1) \in \overline{P}_1$ gilt: $\int_{\overline{P}_2} \frac{1}{p^k} \psi(p_1, w_1, dp, dw) < \infty \quad k = 1, 2$

Wir können noch zusätzlich annehmen

für $(p_1, w_1) >> 0$ gilt : $\psi(p_1, w_1, P_2) = 1$

Mit Fastsicherheit werden also positive Löhne und Preise erwartet, dabei ist - allgemein für $E \in B(\overline{P}_2)$ - $\psi(p_1, w_1, E)$ die Wahrscheinlichkeit, daß Preis p_2 und Lohn w_2 in E liegen, wenn heute (p_1, w_1) herrschen. Diese plausible Annahme ist jedoch für den weiteren Beweisgang nicht nötig.

Die Präferenzen des Konsumenten seien durch eine Nutzenfunktion $u(c_1, c_2)$ beschrieben, die folgende Eigenschaften hat:

B) 1) u ist zweimal stetig differenzierbar

2) u und die ersten partiellen Ableitungen u_1, u_2 sind beschränkt , $u_{12} \geq 0$.

3) u ist strikt konkav und strikt monoton wachsend, damit gilt schon : $u_1, u_2 > 0$, $u_{11}, u_{22} < 0$

Def. : Ein Konsument, beschrieben durch $(u, m_o, \bar{I}, q, \psi)$ heißt vom C2-Typ, wenn A) und B) erfüllt sind.

Im weiteren sei der Konsument von diesem Typ. Ziel ist es wieder, den erwarteten Nutzen zu maximieren.

Wählt der Konsument nun heute die Aktion (c_1, m_1) , und ist morgen die Preis-Lohn-Kombination (p_2, w_2) $p_2 > 0$, so ist der maximale Nutzen bei sicherer Beschäftigung $u(c_1, \frac{m_1 + w_2}{p_2})$.

Man sieht, daß diese Funktion stetig ist in (c_1, m_1, p_2, w_2) , $p_2 > 0$. Da u außerdem beschränkt ist, ist die Abbildung

$$v : \mathbb{R}_+^2 \times \bar{P}_1 \to \mathbb{R}_+$$

$$v(c_1, m_1, p_1, w_1) = \int_{\bar{P}_2} [q\, u(c_1, \frac{m_1 + w\bar{l}}{p}) + (1 - q)\, u(c_1, \frac{m_1}{p})]\ \psi(p_1, w_1, dp, dw)$$ wohldefiniert.

Man sieht sofort, durch Vergleich zum Fall unter Sicherheit, daß v die indirekte Nutzenfunktion darstellt. Analog zu Grandmont [11] Satz 3.1 läßt sich dann zeigen :

Lemma 12 :

1) v ist stetig auf $\mathbb{R}^2_+ \times \bar{P}_1$

für festes $(p_1, w_1) \in \bar{P}_1$ gilt :

2a) $v(\cdot, p_1, w_1)$ ist strikt konkav in (c_1, m_1)

2b) $v(c_1, m_1, (p_1, w_1)) > v(\bar{c}_1, \bar{m}_1, (p_1, w_1))$

wenn $(c_1, m_1) > (\bar{c}_1, \bar{m}_1)$

Der Beweis ist klar; man hat nur die Stetigkeit von u und ψ, sowie die Konkavität und Monotonie von u auszunutzen.

Weiterhin gilt :

Lemma 13:

Zu jedem $(p_1, w_1) \in \bar{P}_1$ existiert genau eine optimale Konsum- und Geldhaltungsentscheidung (c_1^*, m_1^*). c_1^*, m_1^* sind stetig in (p_1, w_1) .

Sie genügen der Gleichung

$$[G'] \quad \int_{\bar{P}_2} \Big[q\, u_1\Big(c_1^*, \frac{m_1^* + w\bar{l}}{p}\Big) + (1-q)\, u_1\Big(c_1^*, \frac{m_1^*}{p}\Big) - q\,\frac{p_1}{p}\, u_2\Big(c_1^*, \frac{m_1^* + w\bar{l}}{p}\Big) - (1-q)\frac{p_1}{p}\, u_2\Big(c_1^*, \frac{m_1^*}{p}\Big)\Big]\, \psi(p_1, w_1, dp, dw)$$

$$+ \mu_1 - \mu_2 p_1 = o \qquad \mu_1 c_1 = o,\ \mu_2 m_1 = o,\ \mu_i \geq o$$

Beweis: Da v in (c_1, m_1) strikt konkav ist, ist der Extremwert - falls existent - eindeutig und ein Maximum. Vollkommen analog zum Fall unter Sicherheit leitet man dann mithilfe von Satz 2, Anhang, ab, daß überhaupt ein Maximum existiert und (c_1, m_1) in (p_1, w_1) stetig sind, da sowohl v als auch die Budgetkorrespondenz stetig sind.

u_1, u_2 sind nicht negativ und wegen der Stetigkeit meßbar. Wegen der Beschränktheit [siehe hierzu etwa: Grauert/Lieb, Infini III)] der u_1, u_2 und der Endlichkeit von $\psi(p_1, w_1, \cdot)$ ist v in c_1, m_1 differenzierbar und es ergibt sich als notwendige (und wegen des oben Gesagten auch hinreichende) Bedingung für einen Extremwert die Gleichung [G'].

Im weiteren soll wieder das Randverhalten untersucht werden.

Lemma 14:

Sei i vom C2- Typ und $(d_n) = (p_1^n, w_1^n)$ eine Folge mit $p_1^n \to \infty$, $w_1^n \to \infty$ und $\lim_n \frac{w_1^n}{p_1^n} > o$

Gilt dann zusätzlich

a) $\forall\ c > o : u_2(c, c) \geq u_1(c, c)$; $q < 1$

b) $\lim_n \int_{\bar{p}_2} \frac{p_1^n}{p} \cdot \psi(p_1^n, w_1^n, dp, dw) \geq 1$

c) $\exists$ B, D, $\bar{p}$, $\bar{w}$: $\forall$ p, w : $p \geq \bar{p}$, $w \geq \bar{w}$:

$\psi(p, w, M_{(p,w)}) = o$ mit

$M_{(p,w)} = [o, p - B] \times \mathbb{R}_+ \cup [p - B, \infty) \times [w + D, \infty)$

Dann ist $\lim_n \|(c_1^n, m_1^n)\| = \infty$

mit $c_1^n := c_1(p_1^n, w_1^n)$, $m_1^n := m_1(p_1^n, w_1^n)$

Bemerkung:

b) bedeutet, daß größere Preise als p_1 nicht stärker gewichtet werden dürfen als kleinere Preise, das Individuum hat also keine hyperinflationären Preiserwartungen. So wird b) etwa erfüllt von um p_1 symmetrischen Verteilungen, insbesondere damit von der Gleichverteilung; von Patinkins statischer (Einpunkt) Verteilung $p_2 = p_1$ und allgemein von allen Punkterwartungen $f(p_1)$ mit

$$\lim_{p_1 \to \infty} \frac{f(p_1)}{p_1} \leq 1$$

c) bedeutet, daß das Individuum bei großen (p_1, w_1) sicher ist, daß der morgige Preis nicht überproportional fällt(der morgige Lohn nicht überproportional wächst) insgesamt werden also Preis und Lohn mit großer Wahrscheinlichkeit in der " näheren Umgebung" von (p_1, w_1) erwartet.

Beweis:

Ann.: Die Behauptung ist falsch, somit gilt : Es gibt eine Teilfolge (O dieselbe Bezeichnung) mit

$$c_1^n \to K_1, \; m_1^n \to K_2 \; , \; K_i < \infty \qquad i = 1,2$$

Aus der Budgetgleichung erhält man dann wieder

$$c_1^n \to \frac{w_1^n}{p_1^n} \bar{I} > 0$$

Ist $\lim_n \frac{w_1^n}{p_1^n} = \infty$, (das ist auch erfüllt, wenn $w_1^n \to \infty$, $\lim_n p_1^n < \infty$) , so gilt auch $\| (m_1^n, c_1^n) \| \to \infty$, also sei $\lim_n \frac{w_1^n}{p_1^n} = K > o$. Für n hinreichend groß, ist dann $c_1^n > o$,

also können wir wieder von Gleichung [G'] ausgehen:

$$\forall\ n \geq n_o : \int_{\overline{P}_2} [\, q\, u_1(c_1^n, \frac{m_1^n}{p} + \frac{w\overline{1}}{p}) + (1-q)\, u_1(c_1^n, \frac{m_1^n}{p})]\, \psi(p_1^n, w_1^n, dp, \tilde{a}w)$$

$$\geq \int_{\overline{P}_2} [\, q\, \frac{p_1^n}{p}\, u_2(c_1^n, \frac{m_1^n}{p} + \frac{w\overline{1}}{p}) + (1-q)\frac{p_1^n}{p}\, u_2(c_1^n, \frac{m_1^n}{p})]\, \psi(p_1^n, w_1^n, dp, dw)$$

Nun seien $p_1^n \geq \overline{p}$, $w_1^n \geq \overline{w}$.

$\forall\ n \geq n_o$:

$$\max_{\substack{(p,\,w)\,\epsilon\,E\subset\overline{P}_2 \\ \psi(p_1^n, w_1^n, E)\neq o}} [q\, u_1(c_1^n, \frac{m_1^n}{p} + \frac{w\overline{1}}{p}) + (1-q)\, u_1(c_1^n, \frac{m_1^n}{p})] \int_{\overline{P}_2} \psi\,(p_1^n, w_1^n, dp, dw)$$

$$\geq \min_{\substack{(p,w)\,\epsilon\,E \\ \psi(p_1^n, w_1^n, E)\neq o}} [q\, u_2(c_1^n, \frac{m_1^n}{p} + \frac{w\overline{1}}{p}) + (1-q)\, u_2(c_1^n, \frac{m_1^n}{p})] \int_{P_2} \frac{p_1^n}{p}\, d\,\psi\,(\cdot)$$

Nun ist $u_{12} \geq o$ und u_2 monoton fallend, damit folgt

$$q\, u_1(c_1^n, \frac{m_1^n}{p_1^n - B} + \frac{(w_1^n + D)\overline{1}}{p_1^n - B}) + (1-q)\, u_1(c_1^n, \frac{m_1^n}{p_1^n - B})$$

$$\geq [q\, u_2(c_1^n, \frac{m_1^n}{p_1^n - B} + \frac{(w_1^n + D)\bar{I}}{p_1^n - B}) + (1-q)\, u_2(c_1^n, \frac{m_1^n}{p_1^n - B})] \int_{P_2} \frac{p_1^n}{p}\, d\psi$$

Alle Limiten existieren, somit ist

$$q\, u_1(K\bar{I}, K\bar{I}) + (1 - q)\, u_1(K\bar{I}, o) \geq$$

$$[q\, u_2(K\bar{I}, K\bar{I}) + (1 - q)\, u_2(K\bar{I}, o)] \cdot 1$$

Nun ist $u_2(d, o) > u_2(d, d) \geq u_1(d, d) \geq u_1(d, o)$
a)

damit $q\, u_1(K\bar{I}, K\bar{I}) + (1 - q)\, u_1(K\bar{I}, o) > q\, u_1(K\bar{I}, K\bar{I})$

$+ (1 - q)\, u_1(K\bar{I}, o)$ ~~#~~ somit also

$$\| (c_1^n, m_1^n) \| \to \infty$$

Lemma 15

Sei der Konsument vom C2-Typ

$a, b, c, d > 0$, $a < b$, $c < d$, $m_o > 0$ und $\varepsilon > 0$.

Für $p_1 < \varepsilon$ gelte :

α) $\psi(p_1, w_1, [ap_1, bp_1] \times \mathbb{R}_+) = 1$ oder

β) $\psi(p_1, w_1, [c, d] \times \mathbb{R}_+) = 1$

Dann ist für jede Folge $d_n = (p_1^n, w_1^n)$ mit $p_1^n \to 0$:

$$\lim_n \| (c_1^n, m_1^n) \| = \infty$$

Das Lemma besagt also : Ist die Randverteilung von ψ bezüglich p_1 für kleines p_1 auf ein endliches Intervall beschränkt, das entweder von p_1 unabhängig oder höchstens so schnell wie p_1 "gegen Null konvergiert", so wächst $\| (c_1, m_1) \|$ unbeschränkt.

Beweis :

Wir gehen wieder von der Gleichung [G'] aus.

Sei $c_1^n := c_1(p_1^n, w_1^n)$, $m_1^n := m_1(p_1^n, w_1^n)$.

Ann.: Die Behauptung ist falsch, dann gibt es eine Teilfolge

(O dieselbe Bezeichnung)

mit $\lim c_1^n = K_1$, $\lim m_1^n = K_2$

Da c_1^n beschränkt bleibt, gilt

$$K_2 = \lim_n (w_1^n \bar{I} + m_o) > 0 .$$

Da für $w_1^n \to \infty$ das Lemma schon bewiesen ist, nehmen wir an, daß $w_1^n \to K_3 < \infty$.

Damit gilt also für $p_1^n < \varepsilon$:

$$\int_{\bar{P}_2} [q u_1 (c_1^n, \frac{m_1^n + w\bar{I}}{p}) + (1-q) u_1 (c_1^n, \frac{m_1^n}{p})] \psi (p_1^n, w_1^n, dp, dw)$$

$$\leq \int_{\bar{P}_2} \left[q \frac{p_1^n}{p} u_2(c_1^n, \frac{m_1^n + w\bar{I}}{p}) + (1-q) \frac{p_1^n}{p} u_2(c_1^n, \frac{m_1^n}{p}) \right] \psi (p_1^n, w_1^n, dp, dw)$$

Wir schätzen - zuerst für α) - die linke Seite durch das Minimum des Integranden, die rechte durch das Maximum nach oben ab :

Damit gilt : $u_1(c_1^n, \frac{m_1^n}{bp_1^n}) \int d\psi(\cdot) \leq \frac{p_1^n}{ap_1^n} u_2 (c_1^n, \frac{m_1^n}{bp_1^n}) \int d\psi($

also

$$\lim_n u_1(c_1^n, \frac{m_1^n}{bp_1^n}) = u_1(K_1, \infty) \leq \frac{1}{a} u_2 (K_1, \infty) = 0 \qquad \#$$

denn $K_1 < \infty$ und damit $u_1(K_1, \infty) > 0$, also gilt

$$\| c_1^n , m_1^n \| \underset{n}{\to} \infty \ .$$

Auf die (in Lemma 4) notwendige Bedingung : $u_2(K, \infty) = 0$ kann hier verzichtet werden, da sie sich schon aus der Beschränktheit von u ergibt .

Der Beweis zu β) verläuft analog, wir haben nur ap_1 durch c und bp_1 durch d zu ersetzen. Dann gilt :

$$u_1(c_1^n, \frac{m_1^n}{d}) \leq \frac{p_1^n}{c} u_2(c_1^n, \frac{m_1^n}{d}) \quad , \text{ also im Limes}$$

$$u_1(K_1, \frac{K_2}{d}) \leq 0 \cdot u_2(K_1, \frac{K_2}{d}) = 0 \qquad \#$$

Damit ist das Lemma bewiesen .

Die Firma sei unsicher über Absatzbeschränkungen und über den morgigen Preis. Diese Erwartung hänge nur vom heutigen Preis p_1 ab und sei von der Rationierung X mit Dichte $d(x)$ unabhängig.

Wir definieren im einzelnen :

$S_i := \{p_i \mid p_i > 0\}$ $\quad i = 1,2$,

$B(S_2)$ sei die Borel σ-Algebra über S_2 und $M(S_2)$ die Menge der W-Maße auf $(S_2, B(S_2))$. $M(S_2)$ sei mit der Topologie der schwachen Konvergenz versehen , $\varphi : S_1 \to M(S_2)$ sei eine Abbildung.

Def.: Eine Firma, beschrieben durch $(g_o, F(1), D(X), \varphi)$ heißt vom C-2 Typ, wenn gilt :

a) $g_o > 0$ $\quad [\, m_o > 0 \,]$

b) F ist zweimal differenzierbar ,
$F(0) = 0$, $F' > 0$, $F'' < 0$

c) X ist eine stetige Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion D , und Dichte $d : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, d stetig und für alle $x > 0$ gilt : $d(x) > 0$

d) φ ist eine stetige Abbildung ,

$$\forall\, p_1 : \int_{S_2} p \; \varphi(p_1, dp) < \infty$$

Wir nehmen im weiteren an, daß diese Voraussetzungen erfüllt sind.

Damit ist dann in beiden Fällen die zu maximierende Funktion

$$K(V, l) = p_1 V - w_1 l + \int_{S_2} p \left[\int_{o}^{g_o - V + F(l)} x \, d(x) \, dx \right.$$

$$\left. + (g_o - V + F(l)) \int_{g_o - V + F(l)}^{\infty} d(x) \, dx \right] \varphi(p_1, dp)$$

Da der eigentliche Integrand aber von p unabhängig ist, ist K wohldefiniert und läßt sich folgendermaßen schreiben :

$$K(V, l) = p_1 V - w_1 l + E_{p_1}(P) \left[\int_{o}^{g_o - V + F(l)} x d(x) dx + (g_o - V + F(l)) \int_{g_o - V + F(l)}^{\infty} d(x) dx \right.$$

mit $E_{p_1}(P) := \int_{S_2} p \; \varphi(p_1, dp)$

Alles weitere vollzieht sich damit analog zum Fall der Punkterwartung.

Satz 8

Die Ökonomie besteht aus $|I|$ Konsumenten und $|J|$ Firmen, die jeweils alle vom C-2 Typ sind.

Gilt dann für wenigstens ein i_o

a) $m_{o_i} > 0$,

es gibt ε_{i_o} , sodaß für $p_1 < \varepsilon_{i_o}$:

$\psi_{i_o}(p_1, w_1, [a p_1, b p_1] \times \mathbb{R}_+) = 1$ oder

$\psi_{i_o}(p_1, w_1, [c, d] \times \mathbb{R}_+) = 1$

mit $0 < a < b$, $0 < c < d$

und für wenigstens ein i_1

b) $q_{i_1} < 1$, $u_{2_{i_1}}(c, c) \geq u_{1_{i_1}}(c, c)$ $\forall$ $c > o$

c) $\lim_n \int_{p_2} \frac{p_1^n}{p} \psi_{i_1}(p_1^n, w_1^n, dp, dw) \geq 1$

für jede Folge $d_n = (p_1^n, w_1^n)$

mit $p_1^n \to \infty$, $w_1^n \to \infty$ und $\frac{w_1^n}{p_1^n} \to K > 0$

d) $\exists$ B , $D > o$, $\bar{p}$, $\bar{w}$: $\forall$ p_1, w_1: $p_1 > \bar{p}$, $w_1 > \bar{w}$:

$\psi_{i_1}(p_1, w_1, M_{(p_1, w_1)}) = o$ $\quad p_2 \setminus M_{(p_1, w_1)} = [p_1 - B, \infty) \times [o, w_1 + D]$

und für wenigstens ein j_o

e) $\lim_{l \to \infty} F'_{j_o}(l) = 0$,

sowie in Fall 2:

$\lim_{p_1 \to \infty} \frac{E_{p_1}(p)}{p_1} = \gamma$ $\quad \gamma \in (o, 1]$, und $\lim_{p_1 \to \infty} E_{p_1}(p) > 0$

so existiert ein temporäres Gleichgewicht.

Beweis:

Vollkommen analog zu Satz 7 . Dabei wird das Randverhalten durch Lemma 14, 15 und Lemma 1o , das ohne Modifikationen übernommen werden kann, bestimmt.

Satz 8 läßt sich nicht als einfache Verallgemeinerung von Satz 7 auffassen. Zwar erhält man, wenn ψ ausgeartet ist (Einpunktmaß), also $\psi(p_1, w_1, f(p_1), g(w_1)) = 1$, aus b):

$\lim_{p_1 \to \infty} \frac{p_1}{f(p_1)} \geq 1$, also $\lim_{p_1 \to \infty} \frac{f(p_1)}{p_1}$ beschränkt; aus Bedingung c)

für großes (p_1, w_1) :

$f(p_1) \geq p_1 - B$ und $g(w_1) \leq w_1 + D$, also

$$\lim \frac{w_1}{p_1} = K \ , \ o \leq K < \infty \ \Rightarrow \ \lim \frac{g(w_1)}{f(p_1)} \leq \lim \frac{w_1}{p_1} = K$$

zusammen also die Bedingungen c) und d) des Satzes 7 , jedoch wird in diesem Satz nicht die Beschränktheit von u, u_1, u_2 verlangt, bis auf bestimmte Randbedingungen kann u beliebig sein. Zum anderen können hier nicht $f(p) = a\,p$ mit $a > 1$ mitbehandelt werden wie in Satz 7 .

Eindeutigkeit

Wir wollen nun noch untersuchen, in welchen Fällen das temporäre Gleichgewicht eindeutig ist.
Wir setzen voraus, daß im ganzen nachfolgenden Abschnitt der Konsument vom C-2 Typ ist.

Nun sei $\lambda > 0$, λ fix und $E \subset \overline{P}_2$; $\mu \in M(\overline{P}_2)$ sei ein Maß.

Wir definieren dann

$\lambda E := \{ y \mid y = \lambda x \ , \ x \in E \}$ und ein weiteres Maß

$\lambda\mu$, $\lambda\mu \in M(\overline{P}_2)$, durch

$$(\lambda\mu)(B) := \mu \left(B \cdot \frac{1}{\lambda} \right) \qquad B \in (\overline{P}_2)$$

An die (stetige) Funktion ψ machen wir dann die folgende Homogenitätsannahme :

c) $\forall \lambda > 0$, $\forall (p_1, w_1) >> 0$ gilt : $\psi(\lambda p_1, \lambda w_1) = \lambda \psi(p_1, w_1)$

Diese Annahme ist ziemlich restriktiv , insbesondere sind Maße ausgeschlossen mit $\psi(p_1, w_1)(D) = 1$, D kompakt .

Wir wollen im weiteren Maße angeben, die dieser Bedingung genügen.

Ist $\psi(p_1, w_1)$ ein Ein-Punkt-Maß, so erhalten wir genau die schon oben benutzten statischen Erwartungen

$f(p_1) = ap_1$, $g(w_1) = bw_1$, $a, b > 0$, denn :

Seien $f(p_1)$, $g(w_1)$ beliebige stetige Funktionen mit

$\psi (p_1, w_1 , f(p_1) , g(w_1)) = 1$. Dann gilt :

$$\psi(\lambda p_1, \lambda w_1, f(\lambda p_1), g(\lambda w_1)) = 1 = \lambda\psi(p_1, w_1, f(\lambda p_1), g(\lambda w_1))$$

$$= \psi\left(p_1, w_1, \frac{f(\lambda p_1)}{\lambda}, \frac{g(\lambda w_1)}{\lambda}\right) = \psi(p_1, w_1, f(p_1), g(w_1))$$

Damit ist $\frac{f(\lambda p_1)}{\lambda} = f(p_1)$ und $\frac{g(\lambda w_1)}{\lambda} = g(w_1)$, d.h. f und g sind linear. Daselbe Ergebnis erhalten wir natürlich, wenn $\psi(p_1, w_1)$ ein Maß mit endlicher, diskreter Verteilung ist. Im weiteren machen wir daher die Annahme, daß $\psi(p_1, w_1)$ eine stetige , damit Borel-meßbare Dichte $f(p_1, w_1, p, w)$ bezüglich des Lebesguemaßes μ besitzt, also

$\psi(p_1, w_1)(B) = \int_B f \, d\mu$. Dann gilt :

Lemma 16 :

Die Abbildung ψ erfülle die Eigenschaft c) und $\psi(p_1, w_1)$ besitze eine stetige Dichte $f(p_1, w_1, p, w)$.

Dann gilt für f : (bis auf Nullmengen)

$$\lambda^2 f(\lambda p_1, \lambda w_1, \lambda p, \lambda w) = f(p_1, w_1, p, w) \quad \forall (p_1, w_1, p, w) >>$$

d.h. f ist homogen vom Grade -2 .

Beweis :

Für alle E , $E \in (\overline{P}_2)$, gilt :

$$\psi(\lambda p_1, \lambda w_1, E) = \lambda\psi(p_1, w_1, E) = \psi\left(p_1, w_1, \frac{E}{\lambda}\right)$$

Schränken wir ein auf :

$E = [a,b] \times [c,d]$, $0 \leq a < b$, $0 \leq c < d$,

(als abgeschlossene Mengen liegen sie natürlich in $B(\overline{P}_2)$),

so gilt :

$$\psi(\lambda p_1, \lambda w_1, [a,b] \times [c,d]) = \int_a^b \int_c^d f(\lambda p_1, \lambda w_1, p, w)\, dw\, dp$$

$$= \psi\left(p_1, w_1, \left[\frac{a}{\lambda}, \frac{b}{\lambda}\right] \times \left[\frac{c}{\lambda}, \frac{d}{\lambda}\right]\right) =$$

$$\int_{\frac{a}{\lambda}}^{\frac{b}{\lambda}} \int_{\frac{c}{\lambda}}^{\frac{d}{\lambda}} f(p_1, w_1, p, w)\, dw\, dp = \int_a^b \int_c^d f\left(p_1, w_1, \frac{p}{\lambda}, \frac{w}{\lambda}\right) \cdot \frac{1}{\lambda^2} dw\, dp$$

Da diese Identität für beliebige Intervalle gültig ist, gilt somit

(fast sicher) für alle $(p_1, w_1, p, w) >> 0$, $\lambda > 0$:

$$f(\lambda p_1, \lambda w_1, p, w) = \frac{1}{\lambda^2} f\left(p_1, w_1, \frac{p}{\lambda}, \frac{w}{\lambda}\right)$$

oder

$$\lambda^2 f(\lambda p_1, \lambda w_1, \lambda p, \lambda w) = f(p_1, w_1, p, w) . \quad (*)$$

Wie man sofort anhand von (*) nachprüft, genügen die Maße mit folgenden Dichten der Homogenitätseigenschaft :

1*) Die Gleichverteilung,

$$f(p_1,w_1,p,w) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)(c-d)p_1w_1} & (p,w) \in [ap_1,bp_1]\times[cw_1,dw_1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

2^*) allgemein Dichten der Form

$$f(p_1,p,w_1,w) = \Big(\sum_{i\in I_1} \alpha_i \frac{p_1^i}{p^{i+1}} \Big)\Big(\sum_{i\in J_1} \beta_i \frac{w_1^i}{w^{i+1}} \Big) \qquad |I_1|,|J_1| <$$

$$I_1, J_1 \subset$$

mit Träger $[ap_1,bp_1]\times[cw_1,dw_1]$, fernerhin solche Dichten, die aus obigen zusammengesetzt (dann nur stückweise stetig differenzierbar) sind .

Die bisherigen Beispiele hatten kompakte Träger. Ein Beispiel eines Maßes, dessen Träger $\mathbb{R}^2_{++}$ ist, liefert die log-Normal-Verteilung N mit Dichte

$$f(p_1,w_1,p,w) = \frac{1}{\sigma_1 2\pi\sigma_2\, pw}\, e^{-\frac{(\ln \frac{p}{p_1})^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(\ln \frac{w}{w_1})^2}{2\sigma_2^2}}$$

und $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ beliebig. $E(N) = p_1 w_1\, e^{\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}$

Wir beweisen nun

Lemma 17 :

ψ erfülle Bedingung c) .

1) Dann ist die indirekte Nutzenfunktion V homogen vom Grade 0 in Preis, Lohn und Geldhaltung, also

$$V(c_1, m_1, p_1, w_1) = V(c_1, \lambda m_1, \lambda p_1, \lambda w_1) \quad , \lambda > 0$$

Für 2) - 4) gelte : Auch u_{11}, u_{12}, u_{22} sind beschränkt.

2) Dann erhält man : $c_1(\lambda p_1, \lambda w_1) \overset{<}{(>)} c_1(p_1, w_1)$ für $\lambda \overset{>}{(<)} 1$

wenn $c_1(p_1, w_1) > 0$ ist .

3) Es gilt : $\dfrac{\partial c_1}{\partial m_o} > 0$

4) Hat $\psi(p_1, w_1)$ einen kompakten Träger der Form

$[ap_1, bp_1] \times [cw_1, dw_1]$ $\quad 0 < a < b \quad , \quad 0 < c < d$

und eine Dichte

$$f(p_1, w_1, p, w) = \frac{1}{(b-a)(d-c)p_1 w_1}$$

so gilt für $c_1 > 0$:

$$\frac{\partial c_1}{\partial w_1} > 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial c_1}{\partial p_1} < 0$$

Bemerkung : Die Verallgemeinerung von 4) auf die unter 2*) angegebenen Dichten bereitet Schwierigkeiten, da Vorzeichenwechsel auftreten können.

Beweis :

1) Analog zum Beweis des Satzes 3.2. aus [11] .

2) Da die Behauptung schon gilt, wenn $m_1 = 0$, sei $m_1 > 0$.

Wir setzen

$$F_1(c_1,m_1,p_1,w_1) = \int_{P_2} [qu_1\left(c_1, \frac{m_1+w\bar{\ell}}{p}\right) - q\frac{p_1}{p} u_2\left(c_1, \frac{m_1+w\bar{\ell}}{p}\right) +$$

$$(1-q)\, u_1\left(c_1, \frac{m_1}{p}\right) - (1-q)\frac{p_1}{p} u_2\left(c_1, \frac{m_1}{p}\right)] \psi(p_1, w_1, dp, dw) =$$

$$F_2(c_1,m_1,p_1,w_1) = p_1c_1 + m_1 - w_1\bar{\ell} - m_o = 0$$

Da u_{11} , u_{12} , u_{22} beschränkt sind, dürfen wir differenzieren und erhalten dann :

$$D(m_1,c_1) = \frac{\partial F_1}{\partial m_1}\frac{\partial F_2}{\partial c_1} - \frac{\partial F_1}{\partial c_1}\frac{\partial F_2}{\partial m_1} = p_1 \frac{\partial F_1}{\partial m_1} - \frac{\partial F_1}{\partial c_1} =$$

$$q \int_{P_2} [u_{12}\left(c_1, \frac{m_1+w\bar{\ell}}{p}\right)\frac{p_1}{p} - \left(\frac{p_1}{p}\right)^2 u_{22}\left(c_1, \frac{m_1+w\bar{\ell}}{p}\right)]\, d\psi$$

$$+ (1-q) \int_{P_2} [u_{12}\left(c_1, \frac{m_1}{p}\right)\frac{p_1}{p} - \left(\frac{p_1}{p}\right)^2 u_{22}\left(c_1, \frac{m_1}{p}\right)]\, d\psi$$

$$- \int_{P_2} [q\, u_{11}\left(c_1, \frac{m_1+w\bar{\ell}}{p}\right) - \frac{qp_1}{p} u_{12}\left(c_1, \frac{m_1+w\bar{\ell}}{p}\right)$$

$$+ (1-q)\, u_{11}\left(c_1, \frac{m_1}{p}\right) - (1-q)\frac{p_1}{p} u_{12}\left(c_1, \frac{m_1}{p}\right)]\, d\psi > 0$$

damit ist

$$\frac{\partial c_1}{\partial m_o} = -\frac{1}{D(c_1,m_1)}\left(\frac{\partial F_2}{\partial m_1}\frac{\partial F_1}{\partial m_o} - \frac{\partial F_1}{\partial m_1}\frac{\partial F_2}{\partial m_o}\right) = \frac{\overbrace{\frac{\partial F_1}{\partial m_1}}^{>0}}{p_1\frac{\partial F_1}{\partial m_1} - \underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial c_1}}_{<0}} > 0 \quad .$$

Wegen 1) verläuft der weitere Beweis dann vollkommen analog zu Satz 3 , zweite Beweisvariante.

3) wurde schon in 2) mitbewiesen .

4) Es gilt :

$$\frac{\partial c_1}{\partial w_1} = -\frac{1}{D(c_1,m_1)}\left(\frac{\partial F_1}{\partial w_1} + \frac{\partial F_1}{\partial m_1}\,\bar{\ell}\right)$$

$$>0 \qquad\qquad >0$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial p_1} = -\frac{1}{D(c_1,m_1)}\left(\frac{\partial F_1}{\partial p_1} - \frac{\partial F_1}{\partial m_1}\cdot c_1\right)$$

Wir erhalten also das gewünschte Ergebnis, wenn $\frac{\partial F_1}{\partial w_1} > 0$ und $\frac{\partial F_1}{\partial p_1} < 0$ gilt.

Nun gilt für alle $(p_1,w_1) >> 0$: $\psi((p_1,w_1)\cdot)$ ist eine Gleichverteilung, d.h. $\psi(p_1,w_1\cdot)$ hat eine Dichte $f_{(p_1,w_1)}$

mit $f_{(p_1,w_1)}(p,w) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)(d-c)p_1w_1} & (p,w)\in[ap_1,bp_1]\times[cw_1,dw_1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Sei nun $c_1 > 0$. Wir können annehmen, daß auch $m_1 > 0$

da sonst schon $\frac{\partial c_1}{\partial p_1} < 0$ und $\frac{\partial c_1}{\partial w_1} > 0$ gilt.

Damit geht G' über in

$$F_1(c_1,m_1,p_1,w_1) = \left(\int_{ap_1}^{bp_1} \int_{cw_1}^{dw_1} \alpha_1 (p,w)\, dw\, dp \right) \cdot \frac{1}{p_1 w_1 (b-a)(d-c)}$$

$$- \left(\int_{ap_1}^{bp_1} \int_{cw_1}^{dw_1} \alpha_2 (p,w)\, dw\, dp \right) \frac{1}{w_1 (b-a)(d-c)} \qquad \text{mit}$$

$$\alpha_1(p,w) := \alpha_{11}(p,w) + \alpha_{12}(p)$$

$$\alpha_2(p,w) := \alpha_{21}(p,w) + \alpha_{22}(p) \qquad \tilde{\alpha}_2(p,w) := p\alpha_2(p,w)$$

und $$\alpha_{11}(p,w) := q\, u_1 \left(c_1, \frac{m_1+w\ell}{p} \right)$$

$$\alpha_{12}(p) := (1-q)\, u_1 \left(c_1, \frac{m_1}{p} \right)$$

$$\alpha_{21}(p,w) := \frac{q}{p}\, u_2 \left(c_1, \frac{m_1+w\ell}{p} \right)$$

$$\alpha_{22}(p) := \frac{(1-q)}{p}\, u_2 \left(c_1, \frac{m_1}{p} \right)$$

Dann gilt :

$$\frac{\partial F_1}{\partial p_1} = \frac{1}{p_1 w_1 (b-a)(d-c)} \left[\left(\iint \alpha_1(p,w)\, dw\, dp \right) \left(-\frac{1}{p_1} \right) \right.$$

$$+ \int_{cw_1}^{dw_1} \left(\alpha_1(bp_1, w)\, b - \alpha_1(ap_1, w)\, a - \right.$$

$$\left. \left. \tilde{\alpha}_2(bp_1, w) + \tilde{\alpha}_2(ap_1, w) \right) dw \right]$$

Indem wir auf das Doppelintegral den Mittelwertsatz der Integralrechnung anwenden, erhalten wir, da $bp_1 > ap_1$, $u_{12} \geq 0$ und $u_{22} < 0$ gilt : (mit $p^* \in [ap_1, bp_1]$)

$$\frac{\partial F_1}{\partial p_1} = \frac{1}{p_1 w_1 (b-a)(d-c)} \int_{cw_1}^{dw_1} \left((\alpha_{11}(bp_1,w) - \alpha_{11}(p^*,w))\, b + \right.$$

$$(\alpha_{12}(bp_1) - \alpha_{12}(p^*))b + (\alpha_{11}(p^*,w) - \alpha_{11}(ap_1,w))\, a$$

$$\left. + (\alpha_{12}(p^*) - \alpha_{12}(ap_1))\, a + \tilde{\alpha}_2(ap_1,w) - \tilde{\alpha}_2(bp_1,w) \right) dw \; < 0$$

da alle Summanden des Integranden nichtpositiv und wenigstens einer negativ ist.

Um $\frac{\partial F_1}{\partial w_1}$ zu berechnen, können wir F_1 vereinfachen. Da α_{12} und α_{22} von w unabhängig sind, fassen wir sie in einer

Funktion $H(p_1,p)$ zusammen und erhalten also noch :

$$F_1(c_1,m_1,p_1,w_1) = \frac{1}{p_1 w_1 (b-a)(d-c)} \iint (\alpha_{11}(p,w) - \alpha_{21}(p,w)p_1)\,dw\,dp$$

$$+ H(p_1,p)$$

Dann ist

$$\frac{\partial F_1}{\partial w_1} = \frac{1}{p_1 w_1 (b-a)(d-c)} \Big[\iint \Big(\frac{\alpha_{21}(p,w)p_1 - \alpha_{11}(p,w)}{w_1} \Big)\,dw\,dp$$

$$+ \int_{ap_1}^{bp_1} (\alpha_{11}(p,dw_1)d - \alpha_{21}(p,dw_1)d\cdot p_1 - \alpha_{11}(p,cw_1)c$$

$$+ \alpha_{21}(p,cw_1)\ c\cdot p_1)\,dp \Big]$$

Durch denselben Schluß wie oben (Mittelwertsatz) erhalten wir mit $w^* \in [cw_1,dw_1]$:

$$\frac{\partial F_1}{\partial w_1} = \frac{1}{p_1 w_1 (b-a)(d-c)} \int_{ap_1}^{bp_1} ((\alpha_{11}(p,dw_1) - \alpha_{11}(p,w^*))d +$$

$$(\alpha_{11}(p,w^*) - \alpha_{11}(p,cw_1))c + (\alpha_{21}(p,w^*) - \alpha_{21}(p,dw_1))p_1\cdot d$$

$$+ (\alpha_{21}(p,cw_1) - \alpha_{21}(p,w^*))c\cdot p_1)\,dp_1 > 0$$

da alle Summanden des Integranden nichtnegativ sind und wenigstens einer positiv ist.

Damit ist Lemma 17 bewiesen .

Es gilt dann der folgende Satz :

Satz 9 :

Alle Konsumenten seien vom C-2 Typ, zusätzlich gilt :

u_{11}^i , u_{12}^i , u_{22}^i sind beschränkt für alle i .

Die Preis-Lohnerwartung jedes Konsumenten sei eine Gleichverteilung (obigen Typs) .

Die Produzenten seien vom C-2 Typ und wie unter Fall 1) beschrieben. Für alle Produktionsfunktionen F gelte : $R_R^F \leq 1$ und die Preiserwartungen resultieren aus Abbildungen φ_j , die Bedingung c) erfüllen.

Dann gilt : Das temporäre Gleichgewicht (soweit existent) ist eindeutig.

Beweis :

Vollkommen analog zum Eindeutigkeitsbeweis in Lemma 11 , wenn die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind :

a) $c_1(\lambda p_1, \lambda w_1) \underset{(>)}{<} c_1(p_1, w_1) \qquad \lambda > 1 \quad \underset{(<)}{} \qquad \left(\frac{\partial c_1}{\partial \lambda} < 0 \right)$

b) $\frac{\partial c_1}{\partial w_1} > 0$ c) $\frac{\partial \ell^N}{\partial w_1} < 0$ d) $\frac{\partial V}{\partial w_1} \leq 0$

e) $\frac{\partial V}{\partial \lambda} \geq 0$ f) $\frac{\partial \ell^N}{\partial \lambda} \leq 0$

Nun gelten a), b) nach Lemma 17 , denn $c(p^*,w^*) > 0$, da wegen $\bar{\ell} > 0$ auch ℓ^N und V positiv sind, und e), f) nach Lemma 7 , wegen der Homogenitätsannahme an φ gilt hier sogar :

$$h(\lambda p_1) = E_{\lambda p_1}(p) = \int p \, d\varphi(\lambda p_1, \cdot) = \lambda \int \frac{p}{\lambda} d(\lambda \varphi(p_1, \cdot)) =$$

$$\lambda \int p \, d\varphi(p_1, \cdot) = \lambda h(p_1)$$

(Dabei wurde Satz 1, A2 aus [11] benutzt). Mit Lemma 5 gilt c),d) .

Der obige Satz läßt sich natürlich abschwächen, da nur $h(\lambda p_1) \leq \lambda h(p_1)$, $\lambda > 1$ und nicht die Gleichheit benötigt wird. Seien die Voraussetzungen von Satz 9 erfüllt. Dann gilt:

Hat wenigstens ein Individuum eine Gleichverteilung der folgenden Form als Erwartung : ($0 < \varepsilon < \eta < 1$)

$$f^i_{(p_1,w_1)}(p,w) = \begin{cases} \dfrac{1}{2p_1 w_1 \varepsilon(\eta-\varepsilon)} & \\ & (p,w) \in [(1-\varepsilon)p_1,(1+\varepsilon)p_1] \times [(1-\eta)w_1,(1-\varepsilon)w \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und gilt $m_{oi} > o$, sowie b) und e) von Satz 8,
so existiert ein eindeutiges temporäres Gleichgewicht, da in diesem Fall neben den Voraussetzungen des Satzes 9 auch Lemma 14 und 15 (Leicht modifiziert) gelten , weil die dort noch zusätzlich gemachten Annahmen auch erfüllt sind

Zusammenfassung :

Ziel dieses Abschnittes war es, Existenz und Eindeutigkeit temporärer Gleichgewichte zu zeigen, wenn wir von sicherer Preis-Lohn-Erwartung übergehen zu Unsicherheit, also von Punkterwartungen zu nicht degenerierten Zufallsvariablen. Dadurch wird eine größere Allgemeinheit erzielt, wir müssen aber andererseits an die Nutzenfunktion stärkere Einschränkungen machen. Qualitativ ändern sich die Ergebnisse jedoch nicht : Der Einselastizität unter Sicherheit steht eine analoge Bedingung gegenüber, den für die Eindeutigkeit benötigten linearen Erwartungen entsprechen Gleichverteilungen. Wie schon im Anschluß an Satz 8 erwähnt, haben wir zwar keine vollständige Verallgemeinerung, aber doch eine weitgehende Analogie erhalten.

IV Der ℓ - Güter - Fall

Wir wollen im folgenden untersuchen, ob sich unsere bisherigen Ergebnisse auf den Fall von ℓ Gütern ($\ell \in \mathbb{N}$) pro Periode verallgemeinern lassen. Wir beschränken uns dazu auf eine reine Tauschwirtschaft.

Nun ist aus dem Vorangegangenen klar, daß Unsicherheit über das morgige Einkommen vorliegen muß, damit die Geldnachfrage unbeschränkt wächst. In unserem bisherigen Modell war das bei Erwartungen mit durch Eins nach oben beschränkter Elastizität (also speziell lineare Erwartungen) und bestimmten Randbedingungen an die Nutzenfunktion erfüllt

($u_1(0,d) = u_2(d,0) = \infty$, $u_2(c,\infty) = 0$, $d > 0$, $c \geq 0$)

Nun betrachtet Hool [18],[19] Ökonomien mit - gegenüber Grandmont [11] - verallgemeinerten Erwartungen. Er behauptet in [18], Patinkins statische Erwartungen eingeschlossen zu haben. Das ist jedoch so nicht der Fall, da er zwar nach oben unbeschränkte Erwartungen zulassen kann, jedoch in seinem Beweis ganz wesentlich eingeht, daß die Erwartungen f gleichförmig nach unten beschränkt sind ($\forall p : f(p) \geq \sigma$, $\sigma \in \mathbb{R}^{\ell}_{++}$) . Es wird nicht klar, ob diese letzte Bedingung in [19] auch unterstellt wird.

Das Ergebnis des folgenden Abschnittes wird sein, daß bei beliebig, aber endlich vielen Gütern noch stärkere Annahmen an die Nutzenfunktion zu machen sind. Wir werden dabei nochmals unterscheiden in die Hool'schen Erwartungen (nach oben unbeschränkt, aber nach unten gleichförmig beschränkt) und die Patinkin Erwartungen.

Zuerst sei aber noch an einer Nutzenfunktion, die auf den ersten Blick keineswegs pathologisch erscheint, demonstriert, daß Unsicherheit über das morgige Einkommen und die bisher benutzten Randbedingungen nicht ausreichen, um die Existenz eines Gleichgewichtes zu erzwingen.

Gegenbeispiel :

Es gebe pro Periode zwei Konsumgüter und Geld. Das Individuum besitze ein Erstgeld von m_o ($m_o > 0$) und eine Gütererstausstattung $w = (w_1, w_2, 0, 0)$, $(w_1, w_2) >> 0$ d.h. also, es erwartet mit Sicherheit, morgen nichts zu bekommen. Bezeichnen wir die Preise der heutigen beiden Konsumgüter mit p_1, p_2 , so habe das Individuum über die morgigen Preise p_3, p_4 die folgenden Erwartungen :

$$p_3 = f(p_1) = a\,p_1 \quad , \quad p_4 = g(p_2) = b\,p_2 \quad , \quad a, b > 0$$

Die Nutzenfunktion sei

$$u\,(c_1, c_2, c_3, c_4) = \log c_1 + \log c_2 + \sqrt{c_3\,c_4}$$

Die indirekte Nutzenfunktion ergibt sich als

$$V\,(c_1, c_2, m_1, p_1, p_2) = \log c_1 + \log c_2 + \frac{m_1}{2\sqrt{f(p_1)\,g(p_2)}}$$

Die Nachfrage erhält man dann als

$$c_1\,(p_1, p_2) = \frac{2\sqrt{f(p_1)\,g(p_2)}}{p_1} = 2\sqrt{\frac{a\,b\,p_2}{p_1}}$$

$$c_2\,(p_1, p_2) = \frac{2\sqrt{f(p_1)\,g(p_2)}}{p_2} = 2\sqrt{\frac{a\,b\,p_1}{p_2}}$$

$$m_1(p_1,p_2) = p_1w_1 + p_2w_2 + m_o - 4\sqrt{f(p_1)\ g(p_2)} = p_1w_1 + p_2w_2 + m_o - 4\sqrt{abp_1p}$$

wenn erfüllt ist : $p_1w_1 + p_2w_2 + m_o > 4\sqrt{abp_1p_2}$

andernfalls als :

$$c_1(p_1, p_2) = \frac{p_1w_1 + p_2w_2 + m_o}{2\ p_1}$$

$$c_2(p_1, p_2) = \frac{p_1w_1 + p_2w_2 + m_o}{2\ p_2}$$

$$m_1(p_1, p_2) = 0$$

Nun sei $w_1 + w_2 = 4\sqrt{a\,b}$, dann gilt für $p_1 = p_2 = p$,

$m_1(p, p) = m_o$,

$$\lim_{p\to o} c_1 = \lim_{p\to o} c_2 = 2\sqrt{a\,b}$$

Das benötigte Randverhalten liegt also hier nicht vor. Man sieht dann auch sofort, daß im allgemeinen kein Gleichgewicht existiert, denn :

Besteht die Ökonomie aus n identischen Konsumenten mit $w_1 = w_2$ so muß in einem Gleichgewicht gelten :

$c_1 = w_1$

$c_2 = w_2$

$m_1 = m_o$

Damit muß $p_1 = p_2$ erfüllt sein. Ist aber $w_1 \neq 2\sqrt{a\,b}$, so existiert kein Gleichgewicht.

Interessant an diesem Beispiel ist, daß bei positiver Geldhaltung kein Real-balance-Effekt vorliegt, es gilt vielmehr bei den oben benutzten statischen Erwartungen :

$$c_1(\lambda p_1, \lambda p_2) = c_1(p_1, p_2) \quad , \quad c_2(\lambda p_1, \lambda p_2) = c_2(p_1, p_2)$$

für alle $\lambda > 0$.

Das liegt daran, daß m_o gar nicht in den Konsum eingeht

$$\frac{\partial c_i}{\partial m_o} = 0 \quad , \quad i = 1,2 \ .$$

Wir bemerken, daß $c_i \xrightarrow[p_i \to 0]{} \infty$ $i = 1,2$, wenn wie bei Hool [18] die Erwartungsfunktionen gleichmäßig nach unten beschränkt sind. Das ist etwa der Fall, wenn wir setzen :

$$f(p_1) := a\, p_1 + c \quad , \quad g(p_2) := b\, p_2 + d \quad , \quad a, b, c, d > 0$$

Ist $m_1 > 0$, so gilt :

$$c_1(p_1, p_2) = 2 \sqrt{\frac{(a\, p_1 + c)(b\, p_2 + d)}{p_1^2}} \quad ,$$

$$c_2(p_1, p_2) = 2 \sqrt{\frac{(a\, p_1 + c)(b\, p_2 + d)}{p_2^2}} \quad \text{und}$$

$$m_1(p_1, p_2) = p_1 w_1 + p_2 w_2 + m_o - 4 \sqrt{(a\, p_1 + c)(b\, p_2 + d)}$$

Wie man sofort sieht, liegt für $p_1 \to 0$ ($p_2 \to 0$) das gewünschte Randverhalten vor, setzen wir jedoch $w_1 = w_2 = w$,

$p = p_1 = p_2$, so gilt für $4ab > w^2$: $\lim_{p\to\infty} m_1(p, p) < \infty$.

Wir erhalten dann im allgemeinen wieder kein Gleichgewicht. Nun könnte man vermuten, daß deswegen die Existenz nicht zu sichern ist, weil u_3 und u_4 sich nicht stetig nach Null fortsetzen lassen. Betrachten wir aber die Nutzenfunktion

$u(c_1, c_2, c_3, c_4) = \log c_1 + \log c_2 + c_3^{\alpha} c_4^{\alpha}$, $\alpha < \frac{1}{2}$, deren partielle Ableitungen u_3 und u_4 im Nullpunkt auch unstetig sind, so sehen wir, daß hier ein Gleichgewicht existiert. Der Unterschied ist der, daß zwar in beiden Fällen im Optimum

$c_3^* = \frac{g}{f} c_4^*$ gilt, aber dann bei der ersten Nutzenfunktion

$\lim_{c_3^*\to o} u_3(c_3^* c_4^*) = \lim_{c_3^*\to o} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c_4^*}{c_3^*}} < \infty$ erfüllt ist, bei

der zweiten jedoch $\lim_{c_3^*\to o} u_3(c_3^*, c_4^*) = \infty$ gilt, wenn der entsprechende Limes von $\frac{g}{f}$ positiv und beschränkt ist. Wir benötigen also im allgemeinen Fall, daß für alle $c \geq 0$, $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ mit $c_3 = 0$ folgendes gilt :

$\lim_n u_3(c^n) = \infty$, wenn $c^n \to c$; das heißt also, der Grenznutzen jedes morgen konsumierten Gutes K muß, unabhängig von der Höhe des Konsums aller anderen Güter, unbeschränkt wachsen, wenn $c_{2K} \to 0$, da sich obige Betrachtungen analog auch für u_4 durchführen lassen.

Wir definieren nun :

Pro Periode gebe es ℓ Konsumgüter und Geld. Geld hat den Preis Eins, für die Preise $p = (p_1, \ldots, p_\ell)$ der heutigen Konsumgüter gelte :

$p \in \overline{P} := \mathbb{R}^\ell_+$. Sei noch $P := \mathbb{R}^\ell_{++}$.

Die Erwartungen über die morgigen Preise lassen sich ausdrücken durch eine Funktion f mit

$$f : \mathbb{R}^\ell_+ \to \mathbb{R}^\ell_+$$

$$p \to f(p) := (f_1(p), \ldots f_\ell(p))$$

Annahme 1 : f ist stetig ; gilt $p >> 0$, so ist auch $f(p) >> 0$.

Sei $w := (w_1, w_2)$, $w_1 := (w_{11}, \ldots w_{1\ell})$, $w_2 := (w_{21}, \ldots w_{2\ell})$ die Gütererstausstattung, m_o die Geldhaltung aus der letzten Periode. Die Präferenzen werden durch eine Nutzenfunktion u beschrieben,

$$u : \mathbb{R}^\ell_+ \times \mathbb{R}^\ell_+ \to \mathbb{R} \quad , \quad \text{für die gilt :}$$

Annahme 2 : u ist eine stetige, strikt konkave und strikt monoton wachsende Funktion, die auf

$$\mathbb{R}^\ell_{++} \times \mathbb{R}^\ell_{++}$$ stetig differenzierbar ist .

Wir bezeichnen mit $c_1 := (c_{11}, \ldots c_{1\ell})$ den heutigen, mit $c_2 := (c_{21}, \ldots c_{2\ell})$ den morgigen Konsum und mit m_1 die Geldhaltung am Ende der ersten Periode , $c := (c_1, c_2)$

Wir definieren nun weiterhin :

Def.: Ein Konsument, beschrieben durch (u, f, w, m_o) heißt vom C-1 Typ, wenn gilt :

a) $w > 0$, $m_o > 0$

b) Die Annahmen 1 und 2 sind erfüllt.

Nun sei $(c_1, m_1) \in \mathbb{R}^{\ell}_{+} \times \mathbb{R}_{+}$, $\underline{p \in P}$. Damit ist $f(p) >> 0$, $u(c_1, \cdot) : \mathbb{R}^{\ell}_{+} \to \mathbb{R}$ ist stetig und nimmt auf

$$\beta_2 (c_1, m_1, p) := \{c_2 \in \mathbb{R}^{\ell}_{+} \mid f(p)\, c_2 \leq f(p)\, w_2 + m_1\}$$

ein eindeutiges (u strikt konkav) Maximum an. Daraus erhalten wir wieder die indirekte Nutzenfunktion $V(c_1, m_1, p)$ und vollkommen analog zu Satz 1 (bzw. vgl. Grandmont [11], Hool [18] zeigt man :

Lemma 18 :

Der Konsument sei vom C-1 Typ. Dann ist für $p \in P$ die indirekte Nutzenfunktion V , $V : \mathbb{R}^{\ell}_{+} \times \mathbb{R}_{+} \times \mathbb{R}^{\ell}_{++} \to \mathbb{R}$ stetig, strikt konkav und monoton in (c_1 , m_1) . Es gibt eine eindeutige Nachfrage (c_1^* , m_1^*) . c_1^* und m_1^* sind stetige Funktionen in p .

Damit gilt dann der folgende

Satz 10 :

Die Ökonomie bestehe aus m Konsumenten vom C-1 Typ.

Gilt dann für wenigstens einen Konsumenten

I $(w_1, m_o) >> 0$, $w_2 = 0$

und entweder

II 1) $\forall\, p \in P$: $f(p) \geq \sigma >> 0$

2) Für jede Folge (c^n) , $c^n := (c_1^n, c_2^n)$

mit $c^n \to c^o$, $c^o \geq 0$ und $c_{2j}^o = 0$

gilt : $\lim\limits_n \dfrac{\partial u}{\partial c_{2j}} (c^n) = \infty$

3) Für jede Folge (p^n) mit $p_i^n \to \infty$ gilt :

$$\lim_n \frac{f_i(p^n)}{p_i^n} =: \varphi_i < \infty$$

4) Für jede Folge (p^n) mit $\lim\limits_n p_i^n < \infty$ gilt :

$$\lim_n f_i(p^n) < \infty$$

oder

III 1) für f gilt : $f_i(p) = a_i p_i$, $a_i > 0$ $\quad 1 \leq i \leq \ell$

2) u hat die Gestalt

$$u(c_1, c_2) = v(c_1) + \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i v_{2i}(c_{2i}) \qquad \alpha_i > 0$$

a) v und alle v_{2i} sind stetig differenzierbar, auf $\mathbb{R}_+^\ell$ bzw. $\mathbb{R}_+$ strikt konkav und strikt monoton wachsend.

b) alle v_{2i} sind beschränkt und $v_{2i}'(0) = \infty$

Dann existiert ein temporäres Gleichgewicht.

Bemerkung 1 :

Wegen der Beschränktheit der v_{2i} gilt schon $v_{2i}'(\infty) = 0$.

Bemerkung 2 :

Der Satz läßt sich natürlich auch zeigen, wenn in III die Erwartungen verallgemeinert werden. Wir haben aus Übersichtlichkeitserwägungen die dafür notwendigen Bedingungen nicht in dem Satz aufgeführt, wir wollen das nun tun, da der Satz in der verallgemeinerten Form bewiesen werden soll.

3) Für die Erwartungsfunktion f gilt :

a) $\forall\, p : p \in \overline{P}$ und $p_i > 0 : f_i(p) > 0$

b) Für jede Folge (p^n) mit $\lim_n p_i^n < \infty$ gilt :

$$\lim_n f_i(p^n) < \infty$$

c) Für jede Folge (p^n) mit $p_i^n \to \infty$ gilt :

$$\lim_n \frac{f_i(p^n)}{p_i^n} = \varphi_i < \infty \quad , \quad \lim_n f_i(p^n) > 0$$

d) f ist stetig differenzierbar und für jede Folge (p^n) mit $p^n \to p^o \in \overline{P} \setminus P$ gilt, wenn $p_i^n \to 0$ und $f_i(p^o) = 0$:

$$\lim_n \frac{\partial f_i}{\partial p_i}(p^n) = \tau_i > 0$$

Bemerkung 3 :

Wegen der strengen Monotonie von u gilt auch für

$c^o \in \mathbb{R}^{2\ell}_{+} \setminus \mathbb{R}^{2\ell}_{++}$, $c^o_{ij} > 0$:

$$0 < \lim_n \frac{\partial u}{\partial c_{ij}} (c^n) < \infty \quad , \quad \text{wenn} \quad c^n \to c^o$$

Beweis :

Der Beweis gliedert sich in mehrere Lemmata, für den Beweis mit I, II siehe auch Hool [18] .

Seien nun zuerst I und II erfüllt. Ist $(p^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge im $\mathbb{R}^{\ell}_{+}$, so bezeichnen wir abkürzend mit $c_1^n := c_1(p^n)$, $m_1^n := m_1(p^n)$ die Nachfrage beim Preisvektor p^n .

Lemma 19 :

Sei (p^n) eine Folge mit $p^n \to p^o \in \overline{P} \setminus P$. Dann gilt :

$\| c_1^n, m_1^n) \| \to \infty$

Beweis :

Ann.: Das Lemma ist falsch, dann gibt es eine Teilfolge (O die selbe Bezeichnung) (c_1^n, m_1^n) mit

$(c_1^n, m_1^n) \to (c_1^o, m_1^o)$ und $\| c_1^o \| < \infty$, $m_1^o < \infty$

Sei c_2^n die entsprechende Folge in Periode 2 .

Da m_1^n beschränkt bleibt, gilt nach II1), daß auch c_2^n be-

schränkt bleibt, damit O : $c_2^n \to c_2^o$, $\| c_2^o \| < \infty$.

Nun sei K so gewählt, daß $p_{1K}^n \to 0$. Sei $\bar{c}_1 := c_1^o + d\, e_K$ mit $d > 0$ und e_K der K-te Einheitsvektor.

Es gilt : $(\bar{c}_1, m_1^o) \in \beta(p^o, m_o) := \{(c,m) \in \mathbb{R}_+^{\ell+1} \mid p^o c + m \le p^o w_1 + m_o\}$

Da $m_o > 0$ (I) , ist β l. h. c. auf $\bar{P}$, daher gibt es eine Folge $(\bar{c}_1^n , \bar{m}_1^n)$ mit $(\bar{c}_1^n , \bar{m}_1^n) \in \beta(p^n, m_o)$ und $(\bar{c}_1^n , \bar{m}_1^n) \to (\bar{c}_1 , m_1^o)$. Ist p^n nach oben beschränkt (der ander Fall wird im nächsten Lemma mitbehandelt), wegen II4) gilt dann auch : $f(p^n)$ bleibt beschränkt, wir können dann O annehmen, daß $f(p^n) \to f(p^o)$, $\| f(p^o) \| < \infty$.

Nun sei $0 < \lambda < 1$, $\bar{c}_2^o := \lambda\, c_2^o$. Für großes n gilt dann $f(p^n)\, \bar{c}_2^o \le \bar{m}_1^n$ und damit $u(\bar{c}_1^n , \bar{c}_2^o) \le u(c_1^n , c_2^n)$,

also für $n \to \infty$ und $\lambda \to 1$:

$u(c_1^o + d\, e_K , c_2^o) \le u(c_1^o , c_2^o)$ #

damit gilt : $\| (c_1^n , m_1^n) \| \to \infty$

Lemma 20 :

Sei (p^n) eine Folge mit $\| p^n \| \to \infty$. Gibt es wenigstens ein K ($K \le \ell$) , mit $\lim_n f_K(p^n) < \infty$, so gilt :

$\| (c_1^n , m_1^n) \| \to \infty$

Beweis :

Wir bemerken, daß sich hier der Fall, daß wenigstens ein Preis gegen Null konvergiert, mitbehandeln läßt.

Ann.: Das Lemma ist falsch, dann gibt es wieder (O dieselbe Bezeichnung) eine Teilfolge (c_1^n , m_1^n) mit

$(c_1^n , m_1^n) \to (c_1^o , m_1^o)$ und $\| c_1^o \| < \infty$, $m_1^o < \infty$.

Da f nach unten beschränkt bleibt, gilt auch wieder :

c_2^n bleibt beschränkt, also $O \quad c_2^n \to c_2^o$, $\| c_2^o \| < \infty$.

Nun seien K und j so gewählt, daß $p_{1K}^n \to \infty$,

$f_j (p^n) \to K_1 < \infty$ und $c_{1K}^o > 0$.

Ein solches K existiert, denn :

Ann.: Für alle K mit $p_K^n \to \infty$ gilt : $c_{1K}^o = 0$

dann erhalten wir, da $w_1 >> 0$:

$$0 > \lim_n \frac{p^n}{\|p^n\|} (c_1^n - w_1) = \sum_{\substack{K \\ p_K^n \neq \infty}} \lim_n \frac{p_K^n}{\|p^n\|} (c_{1K}^n - w_{1K})$$

$$+ \sum_{\substack{K \\ p_K^n \to \infty}} \lim_n \frac{p_K^n}{\|p^n\|} (c_{1K}^n - w_{1K}) = \sum_{\substack{K \\ \lim_n \frac{p_K^n}{p^n} > 0}} (-w_{1K}) \lim_n \frac{p_K^n}{\|p^n\|} =$$

$$\lim \frac{m_o - m_1^n}{\|p^n\|} = 0$$

#

Für n hinreichend groß gilt dann, wenn wir ein solches K wählen :

$$\bar{c}_1^n := c_1^n - \frac{e_K}{p_K^n} > 0$$

Definieren wir $\bar{m}_1^n := m_1^n + 1$, $\bar{c}_2^n := c_2^n + \frac{e_j}{f_j(p^n)}$,

so ist $(\bar{c}_1^n, \bar{c}_2^n)$ erreichbar ,

$$\bar{c}_1^n \to c_1^o \quad , \quad \bar{m}_1^n \to m_1^o + 1 \quad , \quad \bar{c}_2^n \to c_2^o + \frac{e_j}{K_1}$$

Es gilt weiter $u(\bar{c}_1^n, \bar{c}_2^n) \leq u(c_1^n, c_2^n)$ und dann im Limes

$$u(c_1^o, c_2^o + \frac{e_j}{K_1}) \leq u(c_1^o, c_2^o)$$

also $\|(c_1^n, m_1^n)\| \to \infty$

Lemma 21 :

Sei (p^n) eine beliebige Folge mit $\|p^n\| \to \infty$

Dann gilt $\|(c_1^n, m_1^n)\| \to \infty$.

Beweis : Wegen Lemma 20 und II4) können wir annehmen, daß für alle i gilt : $p_i^n \to \infty$ und $f_i(p^n) \to \infty$

Ann.: Das Lemma ist falsch, damit gilt wieder ☇ :

$\|c_1^n\| \to \|c_1^o\| < \infty$, $m_1^n \to m_1^o < \infty$. Da $f_i(p^n) \to \infty$ für alle i , gilt für den morgigen Konsum : $c_2^n \to 0$

Nun zeigt man wieder - analog zu Lemma 20 - daß wenigstens ein K existiert mit $c_{1K}^{o} > 0$. Wir definieren

$$\bar{c}_1^n := c_1^n - \frac{e_K}{p_K^n} \quad , \quad \bar{m}_1^n := m_1^n + 1 \quad , \quad \bar{c}_2^n := c_2^n + \frac{e_K}{f_K(p^n)}$$

Damit gilt $\bar{c}_1^n \to c_1^n$, $\bar{c}_2^n \to c_2^n \to 0$

$(\bar{c}_1^n, \bar{c}_2^n)$ ist erreichbar und es gilt

$$u(\bar{c}_1^n, \bar{c}_2^n) - u(c_1^n, c_2^n) = \frac{\partial u}{\partial c_{1K}} (\tilde{c}_1^n, \bar{c}_2^n)\left(-\frac{1}{p_K^n}\right)$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial c_{2K}} (c_1^n, \tilde{c}_2^n) \frac{1}{f_K(p^n)}$$

$$= \frac{1}{p_K^n} \left(\frac{p_K^n}{f_K(p^n)} \frac{\partial u}{\partial c_{2K}} (c_1^n, \tilde{c}_2^n) - \frac{\partial u}{\partial c_{1K}} (\tilde{c}_1^n, \bar{c}_2^n) \right)$$

mit

$$\tilde{c}_1^n = (c_{11}^n, \ldots c_{1K-1}^n, \xi_{1K}^n, \ldots . c_{1\ell}^n) \text{ und } \xi_{1K}^n \in \left[c_{1K}^n - \frac{1}{p_K^n}, c_{1K}^n\right]$$

$$\tilde{c}_2^n = (c_{21}^n, \ldots c_{2K-1}^n, \xi_{2K}^n, \ldots . c_{2\ell}^n) \text{ und } \xi_{2K}^n \in \left[c_{2K}^n, c_{2K}^n + \frac{1}{f_K(p^n)}\right]$$

Nun gilt : $\xi_{2K}^n \to 0$, $\xi_{1K}^n \to c_{1K}^o =: \alpha > 0$ und

$\frac{p_K^n}{f_K(p^n)} \to \frac{1}{\varphi_i} > 0$. Damit bleibt $\frac{\partial u}{\partial c_{1K}}$ beschränkt , aber

$\frac{\partial u}{\partial c_{2K}}$ wächst unbeschränkt; mithin ist für großes n die Diffe-

renz positiv #, also $\|(c_1^n, m_1^n)\| \to \infty$

Im weiteren seien I, III gültig, d.h. für wenigstens ein i gilt:

$p_i \to 0$, $f_i(p) \to 0$.

Dann gilt :

Lemma 22 :

Sei (p^n) eine Folge mit $p^n \to p^o \in \overline{P} \setminus P$, $\|p^n\| \leq K \quad \forall\, n$

Dann gilt : $\|(c_1^n, m_1^n)\| \to \infty$

Beweis :

Ann.: Das Lemma ist falsch, dann können wir wieder annehmen

$$c_1^n \to c_1^o \quad , \quad m_1^n \to m_1^o \, , \; \|(c_1^o, m_1^o)\| < \infty \, .$$

Gilt nun $p_i^n \to 0 \quad \forall\, i$, so erhält man $m_1^n \to m_1^o = m_o > 0$

ansonsten gibt es wenigstens ein K mit $\lim_n p_K^n > 0$, mit 3a)

ist dann auch $\lim_n f_K(p^n) > 0$. Ann.: $\lim_n m_1^n = 0$, dann ist

$c_{2K}^n \to 0$. Da aber $p_K^n w_{1K} + m_o > m_o > 0$, gibt es sogar ein j

mit $\alpha := \lim_n c_{1j}^n > 0$ und $\lim_n p_j^n > 0$, da $\|p^n\| \leq K$.

Nun sei i so, daß $p_i^n \to 0$. Wir definieren dann

$$\overline{c}_1^n = c_1^n - \frac{e_j p_i^n}{p_j^n} \quad , \quad \overline{m}_1^n = m_1^n + p_i^n \quad , \quad \overline{c}_2^n = c_2^n + \frac{e_j p_i^n}{f_j(p^n)}$$

Nun ist u additiv und beschränkt bezüglich des Vektors c_2 damit gilt :

$$u(\bar{c}_1^n, \bar{c}_2^n) - u(c_1^n, c_2^n) = \frac{\partial v}{\partial c_{1j}} (c_{11}^n, \dots c_{1j-1}^n, \xi_{1j}^n, \dots c_{1\ell}^n)(-\frac{p_i^n}{p_j^n})$$

$$+ v'_{2j}(\xi_{2j}^n)(\frac{p_i^n}{f_j(p^n)}) \quad \text{mit} \quad \xi_{1j}^n \in [c_{1j}^n - \frac{p_i^n}{p_j^n}, c_{1j}^n]$$

und $\xi_{2j}^n \in [c_{2j}^n, c_{2j}^n + \frac{p_i^n}{f_j(p^n)}]$. Da $\xi_{1j}^n \to \alpha > 0$

bleibt $\frac{\partial v}{\partial c_{1j}}$ beschränkt, während v'_{2j} unbeschränkt wächst #

also gilt $\lim m_1^n > 0$

Damit sind - als notwendige Bedingungen - im Optimum für große n erfüllt :

$$(*) \qquad \frac{v'_{2i}(c_{2i}^n)}{\frac{\partial v}{\partial c_{1i}}(c_1^n)} = \frac{f_i(p^n)}{p_i^n}$$

Wegen 3d) existiert aber der Limes der rechten Seiten und ist positiv, nämlich τ_i , damit existiert auch der Limes der linken Seite und wegen der Beschränktheit von c_1^n ist $\frac{\partial v}{\partial c_{1i}}(c_1^o)$ positiv. Jedenfalls bleibt c_{2i}^n notwendigerweise beschränkt. Diese Betrachtungen lassen sich für alle i mit $p_i^n \to 0$ durchführen. Damit bleibt auch c_2^n beschränkt. Der weitere Beweis vollzieht sich dann analog zu Lemma 19 .

Lemma 23 :

Sei (p^n) eine Folge mit $\| p^n \| \to \infty$. Gibt es wenigstens ein K mit $\lim_n f_K(p^n) < \infty$, so gilt $\| (c_1^n, m_1^n) \| \to \infty$

Beweis :

Gilt für alle i : $\lim p_i^n > 0$, so haben wir auch wegen 3a) und 3c2), daß $\lim_n f(p^n) \gg 0$ gilt.

Dann vollzieht sich der weitere Beweis analog Lemma 20. (Hierin ist natürlich auch der Fall $p_i^n \to 0$, $f_i(p^n) \to \alpha_i > 0$ eingeschlossen).

Sei also nun $p_i^n \to 0$ und $f_i(p^n) \to 0$. Da es aber wenigstens ein K mit $p_K^n \to \infty$, also $\lim_n f_K(p^n) > 0$, gibt, gil - analog zu dem Beweis in Lemma 22, daß $\lim m_1^n > 0$. Mithilfe der Bedingung (*) erhält man, daß c_{2i}^n beschränkt bleiben muß, der weitere Beweis dann auch wie Lemma 20 .

Lemma 24 :

Sei (p^n) eine Folge mit $\| p^n \| \to \infty$.

Dann gilt $\| (c_1^n, m_1^n) \| \to \infty$.

Beweis :

Siehe Lemma 21

Der weitere Beweis vollzieht sich analog zu Theorem 5.1 von Grandmont [11].

Wir haben damit gesehen, daß sich unter geeigneten Annahmen der Existenzsatz 7 auch auf ein ℓ-Güter Modell übertragen läßt. Die Bedingungen an die Erwartungen sind im wesentlichen dieselben : ihre Elastizität ist wieder durch Eins nach oben beschränkt ; allerdings müssen wir die Bedingungen an das Randverhalten der partiellen Ableitungen von u verschärfen, um sicherzustellen, daß bei linearen Erwartungen ein Gleichgewicht existiert. Hierzu haben wir zusätzlich die Additivität des Nutzens in den Gütern der morgigen Periode benötigt.

V Keynes'sche Gleichgewichte

Obwohl wir in dem bisherigen Teil der Arbeit den Arrow-Debreu-Rahmen weit verlassen haben, ist dennoch eine wichtige Gemeinsamkeit geblieben : Preise und Löhne passen sich jeweils so an, daß die Märkte " geklärt " werden, d. h. also, daß die Überschußnachfrage auf jedem Markt Null ist.

Wir stellen uns nun auf den vollständig entgegengesetzten Standpunkt und nehmen an, daß Preise und Löhne kurzfristig fix sind und ein Gleichgewicht nur über Mengenanpassung zu erreichen ist. Solche Modelle, die in der Lage sind, Phänomene wie Arbeitslosigkeit, Güterüberangebot usw. zu erklären - was die " herkömmliche " temporäre Gleichgewichtstheorie mit Preisanpassung eben nicht leisten kann, da hier jeder Markt " geklärt " wird - haben in letzter Zeit wachsendes Interesse gefunden (siehe hierzu speziell Benassy [4,5,6], Barro-Grossman [2,3], Malinvaud [21]).

Da wir weiterhin in unserem einfachen, anfangs beschriebenen 3 - Güter (Konsumgut, Arbeit, Geld) Modell bleiben, tritt für jedes Preis - Lohn - Paar (p,w) , (p,w) >> 0 einer der folgenden vier Fälle auf :

1) Keynesian unemployment (Produzenten werden auf dem Gütermarkt, die Konsumenten auf dem Arbeitsmarkt rationiert)

2) Repressed inflation (die Konsumenten werden auf dem Gütermarkt, die Produzenten auf dem Arbeitsmarkt rationiert)

3) Classical unemployment (die Konsumenten werden auf beiden Märkten rationiert)

4) " Vierter Fall " (die Produzenten werden auf beiden Märkten rationiert)

Die in Abschnitt III behandelten Gleichgewichte wollen wir im weiteren, um Verwechslungen zu vermeiden, temporäre Walras Gleichgewichte nennen. Sofern ein solches existiert, läßt es sich natürlich als Grenzfall der obigen vier Möglichkeiten auffassen.

Nun sind Keynes'sche Gleichgewichte (Existenz, Eindeutigkeit, Lage in der (p,w) Ebene, Komparative Statik) näher von Hildenbrand [17] auf einem " Makrolevel" untersucht worden.

Ziel des nachfolgenden Abschnitts ist es daher, aufzuzeigen, welche Mikro-Annahmen an Konsumenten und Produzenten zu machen sind, um noch " vernünftige Aussagen " über diese Gleichgewichte und die Komparative Statik zu erhalten und weiterhin herauszustellen, wieweit die temporäre Behandlung der Firma eine weitere Abschwächung der Ergebnisse bedingt. Wir setzen im folgenden voraus, daß der Leser mit dem Begriff der effektiven Nachfrage vertraut ist (siehe hierzu etwa Clower [8] oder Benassy [5,6]) und definieren dazu :

Def.: Konsumenten gehören genau dann demselben Konsumententyp an, wenn alle ihre Charakteristika identisch sind bis auf die Erwartung über morgige Beschäftigung (also u, f, g, m_o, $\bar{\ell}$ stimmen für alle überein, g kann variieren)

Wir betrachten im weiteren zuerst den Konsument :

Konsument

Wir haben nun schon unter der Voraussetzung, daß der Konsument beschäftigt und vom C-1 Typ ist, in Satz 1, sowie Lemma 1,2 gesehen : (B steht als Index für " Beschäftigt ".)

Konsum und Geldhaltung (C_1^B, m_1^B) sind eindeutig bestimmt und stetig.

Gilt $q^B < 1$, $u_1^B(0,d) = u_2^B(d,0) = \infty$, so ist die Nachfrage differenzierbar und es gilt :

$$\frac{\partial m_1^B}{\partial q} < 0 \quad , \quad \frac{\partial c_1^B}{\partial q} > 0 \quad , \quad 0 < \frac{\partial m_1^B}{\partial m_o} < 1$$

$$\frac{\partial c_1^B}{\partial p_1} < 0 \qquad \text{wenn} \quad 1 \geq \eta \geq 0$$

$$\frac{\partial c_1^B}{\partial w_1} \geq 0 \qquad \text{wenn} \quad g'(w_1) \geq 0 \; .$$

Für einen heute Arbeitslosen vom C-1 Typ, (indiziert mit A) leitet man ganz analog ab :

Lemma 25 :
Konsum und Geldhaltung (c_1^A, m_1^A) eines heute Arbeitslosen sind eindeutig bestimmt und stetig, unter den Annahmen

$q^A < 1$, $u_1^A(0,d) = u_2^A(d,0) = \infty$ sogar differenzierbar und es gilt:

$$\frac{\partial m_1^A}{\partial q} < 0 \quad , \quad \frac{\partial c_1^A}{\partial q} > 0 \quad , \quad 0 < \frac{\partial m_1^A}{\partial m_o} < 1$$

$$\frac{\partial c_1^A}{\partial p_1} < 0 \qquad \text{wenn} \quad 1 \geq \eta \geq 0$$

$$\frac{\partial c_1^A}{\partial w_1} \geq 0 \qquad \text{wenn} \quad g'(w_1) \geq 0 \; .$$

Für alle weiteren Ausführungen dieses Abschnittes seien sämtliche Konsumenten vom C-1 Typ und $u_1^{B(A)}(0,d) = u_2^{B(A)}(d,0) = \infty$, $d > 0$ sowie $m_0^{B(A)} > 0$ sei erfüllt.

Wir wollen dann Konsum und Geldhaltung von Beschäftigten und Arbeitslosen miteinander vergleichen. Wir betrachten dazu Individuen aus demselben Konsumententyp.

Es gilt dann :

Lemma 26 : Für $(p_1, w_1) >> 0$ gilt :

1) $1 > q^A \geq q^B \Rightarrow m_1^B > m_1^A$

2) $1 > q^B \geq q^A \Rightarrow c_1^B > c_1^A$

Das Lemma besagt also, daß die Beschäftigten mehr Geld halten, wenn ihre Erwartung nicht positiver ist als die der Arbeitslosen, beim Konsum ist es umgekehrt. Haben beide speziell dieselbe Erwartung $q^A = q^B$, so hält der Beschäftigte mehr Geld und konsumiert auch mehr.

Beweis:

Wegen der Randbedingungen an u gilt : m_1^A , $m_1^B > 0$

c_1^A , $c_1^B > 0$, da $m_o > 0$.

Sei $q^A = q^B = q$

Annahme : $m_1^A = m_1^B$, damit ist $B_1 := \dfrac{m_1^B + g(w_1)\bar{\ell}}{f(p_1)} = \dfrac{m_1^A + g(w_1)\bar{\ell}}{f(p_1)} =: A_1$,

$B_o := \dfrac{m_1^B}{f(p_1)} = \dfrac{m_1^A}{f(p_1)} =: A_o$ und $c_1^B > c_1^A$.

Nun gilt für den Arbeitslosen eine Bestimmungsgleichung [G''] , die analog zu [G] ist. Indem die beiden voneinander subtrahiert werden, erhält man :

$$0 = q(u_1(c_1^B,B_1) - u_1(c_1^A,B_1)) - \frac{q\,p_1}{f(p_1)}\,(u_2(c_1^B,B_1) - u_2(c_1^A,B_1))$$

$$+ (1-q)\,(u_1(c_1^B,B_o) - u_1(c_1^A,B_o)) - \frac{(1-q)p_1}{f(p_1)}\,(u_2(c_1^B,B_o) - u_2(c_1^A,B_o))$$

$$< 0 \quad , \quad \text{da} \quad u_{11} < 0 \quad , \quad u_{12} \geq 0$$

Somit gilt also immer $m_1^A \neq m_1^B$. Nun sind m_1^A , m_1^B stetig in m_o (nach Lemma 2 sogar differenzierbar) und $m_1^B(0) > 0$, aber

$\lim_{m_o \to 0} m_1^A(m_o) = 0$.

Somit gilt also $m_1^B > m_1^A$. Wegen Lemma 2e) gilt dann für $q^A \geq q^B$: $m_1^B > m_1^A$.

2) Indem man wieder von $q^A = q^B$ und der Annahme $c_1^B \leq c_1^A$ ausgeht, erhält man vollkommen analog einen Widerspruch. Mithin gilt für $q = q^A = q^B$: $c_1^B > c_1^A$, wegen Lemma 2 gilt dasselbe dann auch für $q^B \geq q^A$.

Da man nun erwarten wird, daß Arbeitslose immer eine pessimistischere Erwartung haben als die Arbeitenden, wir aber andererseits für das Kommende benötigen, daß Beschäftigte mehr konsumieren und auch mehr Geld halten als Arbeitslose, ist es also zwingend, $q = q^A = q^B$ zu setzen. Das mag eine starke Einschränkung sein, jedoch, solange wie wir nicht in der Lage sind, durch Aggregation über alle Konsumenten eine vernünftige mittlere Nachfrage zu erhalten, ist sie zu rechtfertigen.

Wir nehmen mithin im weiteren an, daß Individuen, die demselben Konsumententyp angehören, vollkommen identische Charakteristika haben. Ist jeder Typ hinreichend oft vertreten, so können wir die folgende Annahme machen :

Die Arbeitslosigkeit ist gleichmäßig über die Konsumenten verteilt. Alle bieten dieselbe Menge an Arbeit, nämlich $\bar{\ell}$, an.

Produzenten

Wir haben schon in den Sätzen 4 und 5 die optimale Verkaufs- und Arbeitsnachfrageentscheidung der Firma bei möglicher morgiger Absatzbeschränkung berechnet, wir wollen nun die Eigenschaften der effektiven Nachfrage genauer bestimmen. Dazu muß das Rationierungsschema angegeben werden. Wir nehmen dazu jedoch vereinfachend an:

Es gibt nur eine Firma; diese wird dann effizient rationiert, d.h. sie kann bei der jeweiligen Beschränkung auf einem Markt ihre Entscheidung optimal anpassen.

Im folgenden sei weiterhin die Firma vom C-1 Typ.

) Rationierung auf dem Gütermarkt

Statt des gewünschten, optimalen $V(p_1, w_1)$ kann die Firma nur $\bar{x}$ ($0 \leq \bar{x} \leq V(p_1, w_1)$ auf dem Gütermarkt absetzen. Wegen der oben gemachten Annahme kann sie dann also unter dieser Beschränkung ihren Arbeitsinput optimal anpassen, sie sieht sich also folgendem Problem gegenüber :

$$\max_{\ell} \Big(p_1 \bar{x} - w_1 \ell + \beta h(p_1) \Big[\int_0^{\sigma_0 - \bar{x} + F(\ell)} x\, d(x)\, dx + (\sigma_0 - \bar{x} + F(\ell)) \int_{\sigma_0 - \bar{x} + F(\ell)}^{\infty} d(x)\, dx \Big]$$

unter folgenden Nebenbedingungen :

Fall 1 : $\ell \geq 0$, $p_1 \bar{x} \geq w_1 \ell$

Fall 2 : $\ell \geq 0$, $m_0 \geq w_1 \ell$

Wir erhalten als eindeutige Lösung $\ell^* = \ell(p_1, w_1, \bar{x})$. Analog zu Satz 4, 5 ist dann auch $\ell(p_1, w_1, \bar{x})$ für $(p_1, w_1) >> 0$ eine stetige Funktion ihrer Argumente und es gilt: ℓ^* löst

$$(*) \quad -w_1 + \beta h(p_1)\left[F'(\ell)(1 - D(g_o - \bar{x} + F(\ell))\right] - \mu_1 w_1 + \mu_2 = 0$$

mit $\mu_i \geq 0$, und in Fall 1: $\mu_1(p_1\bar{x} - w_1\ell) = 0 = \mu_2\ell$

und in Fall 2: $\mu_1(m_o - w_1\ell) = 0 = \mu_2\ell$

Nun sei $\mu_1 = \mu_2 = 0$, dann gilt:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \bar{x}} = -\frac{F'(\ell)\, d\,(g_o - x + F(\ell))}{F''(\ell)(1 - D(g_o - \bar{x} + F(\ell)) - F'^2(\ell)\, d\,(g_o - \bar{x} + F(\ell))} =: -\frac{Z}{N} > 0$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial w_1} = -\frac{-1}{N} < 0$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial p_1} = -\frac{\beta h'(p_1) F'(\ell)(1 - D(.))}{N} > 0$$

Nun sei in Fall 1) $\mu_1 > 0$, mithin $\ell = \frac{p_1}{w_1}\bar{x}$, damit

$$\frac{\partial \ell}{\partial \bar{x}} = \frac{p_1}{w_1} > 0, \quad \frac{\partial \ell}{\partial w_1} = -\frac{p_1\bar{x}}{w_1^2} < 0, \quad \frac{\partial \ell}{\partial p_1} = \frac{\bar{x}}{w_1} > 0$$

$\mu_1 > 0$ in Fall 2 liefert $\ell = \frac{m_o}{w_1}$, damit $\frac{\partial \ell}{\partial \bar{x}} = 0 = \frac{\partial \ell}{\partial p_1}$

$$\frac{\partial \ell}{\partial w_1} = -\frac{m_o}{w_1^2} < 0$$

Der Fall $\mu_2 > 0$, also $\ell = 0$, liefert $\frac{\partial \ell}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \ell}{\partial p_1} = \frac{\partial \ell}{\partial w_1} = 0$

auftreten kann er nur für

$F'(0)(1 - D(g_o - \bar{x})) \leq \frac{w_1}{\beta h(p_1)}$, für $F'(0) = \infty$ ist er also

unmöglich, da dann immer positive Beträge an Arbeit nachgefragt werden.

Nun gilt in Fall 1 :
Ist $\ell > 0$, so ist $\frac{\partial \ell}{\partial \bar{x}} > 0$, wird die Rationierung auf dem Gütermarkt stärker, so wird weniger Arbeit nachgefragt, mithin gilt $\ell(p_1,w_1,\bar{x}) \leq \ell(p_1,w_1,V(p_1,w_1)) = \ell(p_1,w_1)$; die letzte Gleichheit gilt, da die Lösung von (*) eindeutig ist und mit $\bar{x} = V(p_1,w_1)$ genau der Bedingung der unbeschränkten Maximierung von ℓ (siehe Satz 4) entspricht. Aus der Unterscheidung (Seite 49) $\lambda > 0$ oder $\lambda = 0$ erhielten wir

$$\frac{w_1}{p_1} - F'(\ell(p_1,w_1)) \leq 0 \quad , \quad \text{damit auch}$$

$$\frac{w_1}{p_1} - F'(\ell(p_1,w_1,\bar{x})) \leq 0 \quad , \quad \text{da} \quad \ell(p_1,w_1,\bar{x}) \leq \ell(p_1,w_1) \ .$$

$$\Rightarrow \quad d\,(g_o - \bar{x} + F(\ell))\, F'(\ell)\left(\frac{w_1}{p_1} - F'(\ell)\right) \leq -F''(\ell)(1 - D(g_o - \bar{x} + F(\ell)))$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{Z}{N} \leq \frac{p_1}{w_1} \quad , \qquad \ell = \ell(p_1,w_1,\bar{x}) \ .$$

Da im Fall $\mu_1 > 0$ sogar die Gleichheit gilt, haben wir also erhalten

$$0 \leq \frac{\partial \ell}{\partial \bar{x}} \leq \frac{p_1}{w_1}$$

Ist die Preiserwartung konkav, so erhalten wir aus der Optimalitätsbedingung analog zu Lemma 7

$$\ell(\lambda p_1, \lambda w_1, \bar{x}) \leq \ell(p_1, w_1, \bar{x}) \quad , \quad \lambda > 1 \quad .$$

Damit fassen wir zusammen zu

Lemma 27 :

Die effektive Arbeitsnachfrage $\ell(p_1, w_1, \bar{x})$ ist stetig und stückweise partiell differenzierbar. Soweit diese Ableitungen existieren, gilt :

Fall 1 : $\frac{\partial \ell}{\partial \bar{x}} \geq 0$, $\frac{\partial \ell}{\partial w_1} \leq 0$, $\frac{\partial \ell}{\partial p_1} \geq 0$; wenn $\ell > 0$ ist, gelten die strikten Ungleichheitszeichen.

Fall 2 : $\frac{\partial \ell}{\partial \bar{x}} \geq 0$, $\frac{\partial \ell}{\partial w_1} \leq 0$, $\frac{\partial \ell}{\partial p_1} \geq 0$.

In Fall 1 gilt weiterhin

$$\ell(p_1, w_1, V(p_1, w_1)) = \ell(p_1, w_1) \quad , \quad \ell(\lambda p_1, \lambda w_1, \bar{x}) \underset{(=)}{\leq} \ell(p_1, w_1, \bar{x})$$

für konkaves (lineares) $h(p_1)$ $(\lambda > 1)$ sowie

$$0 < \frac{\partial \ell}{\partial \bar{x}} \leq \frac{p_1}{w_1} \qquad \text{wenn} \quad \ell > 0 \quad \text{und} \quad \bar{x} \leq V(p_1, w_1)$$

Bemerkung :

Die letzte Ableitung $\frac{\partial \ell}{\partial \bar{x}} \leq \frac{p_1}{w_1}$ gilt in Fall 2) nicht mehr notwendigerweise, da wegen der Inputbezahlung aus Erstgeldbeständen die Arbeitsnachfrage sehr viel stärker von $h(p_1)$ abhängt. Hier läßt sich nur noch $\frac{\partial \ell}{\partial \bar{x}} \leq \frac{h(p_1)}{w_1}$ zeigen, was natürlich für $h(p_1) \leq p_1$ mit der obigen Abschätzung übereinstimmt.

Rationierung auf dem Arbeitsmarkt

Die Firma kann also in diesem Fall ihren gewünschten Arbeitsinput $\ell(p_1, w_1)$ nicht erhalten, es gilt vielmehr : Sie erhält $\bar{a}$ an Arbeit mit $0 \leq \bar{a} \leq \ell(p_1, w_1)$. Bezeichnen wir das effektive Güterangebot mit $V(p_1, w_1, \bar{a})$, so ergibt es sich als Lösung des folgenden Problems :

$$\max_{V} \; p_1 V - w_1 \bar{a} + \beta h(p_1) \Big[\int_0^{g_o - V + F(\bar{a})} x\, d(x)\, dx + (g_o - V + F(\bar{a})) \int_{g_o - V + F(\bar{a})}^{\infty} d(x)\, dx \Big]$$

unter den Nebenbedingungen : $g_o \geq V \geq 0$

und in Fall 1 : $p_1 V(p_1, w_1, \bar{a}) \geq w_1 \bar{a}$.

Bemerkung : Es gilt $p_1 V(p_1, w_1) > w_1 \bar{a}$ bzw. $\frac{m_o}{w_1} > \bar{a}$.

Analog zu Satz 4, 5 ist dann $V(p_1, w_1, \bar{a})$ eindeutig und stetig in den Argumenten.

$V(p_1, w_1, \bar{a})$ löst die folgende Gleichung :

$$p_1 - \beta h(p_1)(1 - D(g_o - V + F(\bar{a})) - \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 p_1 = 0$$

mit $\mu_1 (g_o - V) = 0 = \mu_2 V$, $\mu_i \geq 0$,

$\mu_3(p_1V - w_1\bar{a}) = 0$ in Fall 1 , $\mu_3 = 0$ in Fall 2

Nun seien $\mu_i = 0$, $1 \le i \le 3$. Dann gilt :

$$\frac{\partial V}{\partial w_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial \bar{a}} = - \frac{+\beta h(p_1)\ d(g_o - V + F(\bar{a}))\ F'(\bar{a})}{-\beta h(p_1)\ d(g_o - V + F(\bar{a}))} = F'(\bar{a}) > 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial p_1} = - \frac{1 - \beta h'(p_1)(1 - D(g_o - V + F(\bar{a}))}{-\beta h(p_1)\ d(g_o - V + F(\bar{a}))} > 0 \qquad \text{wenn} \quad \beta h'(p_1) \le 1$$

Ist $\mu_1 > 0$ oder $\mu_2 > 0$, so gilt $\frac{\partial V}{\partial w_1} = \frac{\partial V}{\partial \bar{a}} = \frac{\partial V}{\partial p_1} = 0$,

dabei ist natürlich für $\bar{a} > 0$ in Fall 1 $\mu_2 > 0$ unmöglich.

Ist $\mu_3 > 0$, so gilt $V(p_1, w_1, \bar{a}) = \frac{w_1}{p_1}\bar{a}$, also

$$\frac{\partial V}{\partial \bar{a}} = \frac{w_1}{p_1} > 0 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial p_1} = - \frac{w_1}{p_1^2}\bar{a} < 0 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial w_1} = \frac{\bar{a}}{p_1} > 0$$

Ist die Preiserwartung konkav, so erhält man

$$V(\lambda p_1, \lambda w_1, \bar{a}) \ge V(p_1, w_1, \bar{a}) \qquad \lambda > 1 \quad .$$

Wir fassen zusammen

Lemma 28 :

Das effektive Güterangebot $V(p_1, w_1, \bar{a})$ ist stetig und stückweise partiell differenzierbar. Soweit diese Ableitungen existieren, ergibt sich :

In Fall 2 :

$$\frac{\partial V}{\partial w_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial \bar{a}} \geq 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial V}{\partial p_1} \geq 0 \quad , \quad \text{wenn} \quad \beta h'(p_1) \leq 1$$

In Fall 1 gilt :

$$\frac{\partial V}{\partial w_1} \geq 0 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial \bar{a}} \geq 0 \quad , \quad \text{das Vorzeichen von} \quad \frac{\partial V}{\partial p_1} \quad \text{ist jedoch}$$

nicht eindeutig :

$$\text{Ist} \quad V > \frac{w_1}{p_1} \bar{a} \quad \text{und} \quad \beta h'(p_1) \leq 1 \quad , \quad \text{so gilt} \quad \frac{\partial V}{\partial p_1} \geq 0$$

$$\text{ist} \quad V = \frac{w_1}{p_1} \bar{a} \quad , \quad \text{so ist} \quad \frac{\partial V}{\partial p_1} \leq 0 \quad .$$

Ist h konkav, gilt für $\lambda > 1$: $V(\lambda p_1, \lambda w_1, \bar{a}) \geq V(p_1, w_1, \bar{a})$

Dieses Verhalten läßt sich so interpretieren :
Will der Produzent heute schon soviel verkaufen, daß die Erlöse größer sind als die Löhne, so werden kleine Lohnveränderungen keinen Effekt haben, hat er aber den Verkauf so weit angepaßt, daß damit gerade die Löhne bezahlt werden, so wird er bei Lohnsteigerungen mehr verkaufen, um sich weiterhin wenigstens den ihm möglichen Arbeitsinput zu sichern, somit $\frac{\partial V}{\partial w_1} \geq 0$.

Wird die Rationierung auf dem Arbeitsmarkt stärker, so wird dieselbe Menge oder weniger verkauft, um den Verlust, der - durch fehlenden Arbeitsinput - bezüglich des morgigen Verkaufs entsteht, auf dem morgigen Markt wenigstens teilweise durch Trans-

ferieren von Lagerbeständen auszugleichen, also $\frac{\partial V}{\partial \bar{a}} \geq 0$ --

eine solche Situation liegt typischerweise vor, wenn ein höherer Preis als heute erwartet wird. Sind die Verkaufserlöse schon größer als die Lohnzahlungen und ist die Preiserwartung nicht allzu optimistisch, so wird bei steigendem Preis nicht weniger verkauft, wird aber der ganze Verkaufserlös für Lohnzahlungen benötigt, so wird im allgemeinen mehr von diesem Gut nach morgen transferiert, um den schon oben erwähnten Verlust wettzumachen.

Wir wollen die bisher erhaltenen Ergebnisse nun auf den Fall des "Keynesian unemployment" anwenden, der von allen vier möglichen Fällen der interessanteste (in der Realität auch der häufigste) ist. Dazu definieren wir (mit $c^B, c^A, m^B, m^A, \bar{\ell}$ als Gesamtgrößen):

Def. : (p, w) ist ein Keynes'sches Gleichgewicht , wenn es eine Arbeitslosenquote $\tilde{u}$, $0 \leq \tilde{u} \leq 1$ und einen (Konsumgut) Verkauf $\bar{x}$, $0 \leq \bar{x} \leq V(p,w)$, gibt mit

$$\alpha) \quad \bar{x} = (1 - \tilde{u})\, c^B(p,w) + \tilde{u}\, c^A(p,w) = c(p,w,\tilde{u})$$

$$\beta) \quad \ell(p,w,\bar{x}) = (1 - \tilde{u})\, \bar{\ell}$$

Weiterhin sei definiert :

$$K_g := \{(p,w) \mid (p,w) \text{ ist ein Keynes-Gleichgewicht}\}$$

$$\tilde{U}_o := \{(p,w) \mid (p,w) \in K_g \,,\ \tilde{u} = 0 \,,\ \bar{x} \leq V(p,w)\}$$

$$Y^* := \{(p,w) \mid (p,w) \in K_g \,,\ \tilde{u} > 0 \,,\ \bar{x} = V(p,w)\}$$

Nun haben Hildenbrand-Hildenbrand [17] schon auf die Bedeutung der Erwartungen in diesem Modell hingewiesen und gezeigt, daß die

Komparative Statik in einem Keynes-Gleichgewicht, selbst in der Nähe des Walras-Gleichgewichtes nicht eindeutig ist. In Malinvaud [21] gilt der Keynes'sche Satz, daß man, um ein Keynes-Gleichgewicht zu " kurieren " den Preis senken oder den Lohn erhöhen sollte, nur wegen der speziellen Struktur des Beispiels. Wir wollen im folgenden zeigen, daß durch die temporäre Behandlung der Firma die Situation noch unübersichtlicher wird.

Um überhaupt Komperative Statik betreiben zu können, müssen die Keynes-Gleichgewichte eindeutig sein.

Lemma 29 :

Konsumenten desselben Typs besitzen identische Charakteristika, die Firma sei wie unter Fall 1) beschrieben ; gilt Fall 2) , so sei $\beta h(p_1) \leq p_1$. Dann gilt :

Zu jedem (p_1,w_1) gibt es höchstens ein Keynes-Gleichgewicht.

Beweis : Nach Lemma 26 gilt $\frac{\partial c(p_1,w_1,\tilde{u})}{\partial \tilde{u}} < 0$, $\frac{\partial m(p_1,w_1,\tilde{u})}{\partial \tilde{u}} \leq 0$

und (soweit existent) $\frac{\partial \ell}{\partial \bar{x}} \in [\, 0 \,,\, \frac{p_1}{w_1} \,]$ (Lemma 27)

$$m(p_1,w_1,\tilde{u}) := (1-\tilde{u})\, m_1^B(p_1,w_1) + \tilde{u}\, m_1^A(p_1,w_1)$$

Damit stellen α) und β) fallende Kurven in der $(\tilde{u},\bar{x})$ Ebene dar, sie haben nur einen Schnittpunkt, wenn in jedem solchen Punkt β) steiler als α) ist. Das gilt aber wegen

$$\frac{\partial \ell}{\partial \bar{x}} \leq \frac{p_1}{w_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial m}{\partial \tilde{u}} < 0 \quad \text{(siehe Hildenbrand [17] Satz 1)}$$

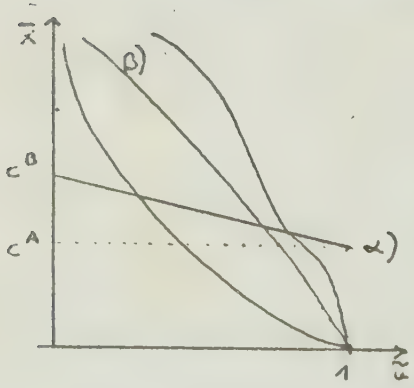
Allerdings kann das Bild hier anders aussehen als bei atemporärer Betrachtung der Firma. Indem man β) umschreibt, ergibt sich :

$\tilde{u}(\bar{x}) = 1 - \frac{\ell(p_1, w_1, \bar{x})}{\bar{\ell}}$ damit in Fall 1 wegen $p_1\bar{x} \geq w_1\ell$ $\tilde{u}(0) = 1$.

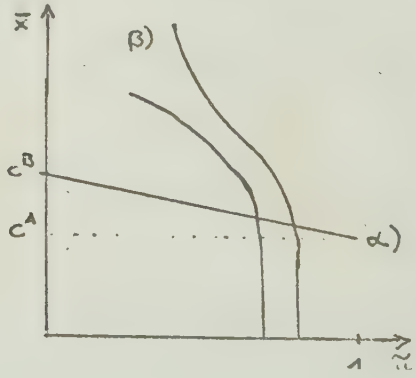
In Fall 2 gilt das nicht notwendigerweise, da auch bei vollständiger Rationierung die Firma eventuell noch Arbeit nachfragt. Weiter ist möglich, daß bei nicht vollständiger Rationierung die effektive Arbeitsnachfrage Null ist (also $\bar{x} > 0$, aber $\ell(p_1, w_1, \bar{x}) = 0$) . (Für $F'(0) = \infty$ allerdings unmöglich) .

Wir zeichnen mögliche Fälle :

Fall 1



Fall 2



Die Steigung von β) kann höchstens in $\tilde{u} = 1$ ∞ werden, sonst gilt

$$\left| \frac{\partial \bar{x}}{\partial \tilde{u}} \Big|_{\beta} \right| < \infty$$

Der Preis-Lohn-Bereich der Keynes-Gleichgewichte

Von Hildenbrand [17] wurden Bedingungen angegeben, unter denen in der (p,w) - Ebene das Keynes-Gebiet eine bestimmte Gestalt hat. Der in [17] bewiesene Satz 2 wird sich jedoch wegen der atemporären Behandlung der Firma nicht ohne weiteres übertragen lassen. Um einen ähnlichen Satz zu zeigen, stellen wir nochmals die benötigten Voraussetzungen voran :

Satz 11 :

Konsumenten und Produzenten seien vom C1-Typ .
Für die Nutzenfunktion jedes Konsumenten i gelte

$u_1^i(o,d) = u_2^i(d,0) = \infty \quad , \quad u_2^i(c,\infty) = 0 \quad , \quad m_{oi} > 0 \ (d>0, c\geq 0)$.

Preis- und Lohnerwartungen seien linear , Beschäftigte und Arbeitslose desselben Konsumententyps j haben dieselbe Erwartung α_j bezüglich der morgigen Beschäftigung , $\alpha_j < 1$.
Für die Firma gilt : (sie agiere wie in Fall 1)
die Produktionsfunktion F erfüllt : $\lim_{\ell\to\infty} F'_j(\ell) = 0$,

$R_R^F(\ell) \leq 1$ und die Preiserwartungsfunktion $h(p_1)$ sei linear mit $\beta h'(p_1) = \beta a \leq 1$.

Dann gilt :

1) Es existiert ein eindeutiges (walrasianisches) temporäres Gleichgewicht.

2) Jedes Keynes'sche Gleichgewicht ist -- soweit existent -- eindeutig .

3) $(p,w) \in K_g$ impliziert $(\lambda p,\lambda w) \in K_g$ für $\lambda > 1$

$\tilde{u}(p,w) \leq \tilde{u}(\lambda p,\lambda w)$, $\bar{x}(\lambda p,\lambda w) < \bar{x}(p,w)$.

Gilt $F'(0) = \infty$,so auch $\tilde{u}(p,w) < \tilde{u}(\lambda p,\lambda w)$.

4) $\tilde{U}_o \cup Y^* \subset$ Rand K_g

5) Y^* liegt oberhalb der Halblinie L durch O und das Walras-Gleichgewicht (p^*,w^*). Zu jedem $w > w^*$ gibt es ein p mit $(p,w) \in Y^*$. Beginnt man in (p^*,w^*) , so wächstlängs Y^* der Reallohn $\frac{w}{p}$ und $\tilde{u}$ wächst. $\tilde{U}_o$ liegt unterhalb von L , $\frac{w}{p}$ ist monoton fallend.

6) Über die Steigung von $\tilde{U}_o$ im Walras-Gleichgewicht läßt sich -- trotz konstanten Arbeitsangebotes und effizienter Rationierung der Firma -- keine Aussage machen.

Bemerkung :

1) Der obige Satz stellt eine Abschwächung von Satz 2 aus Hildenbrand [17] dar, denn wir können nicht , wie noch an einem Beispiel erläutert wird, zeigen :

Y^* besitzt keinen Pol (zu 5)

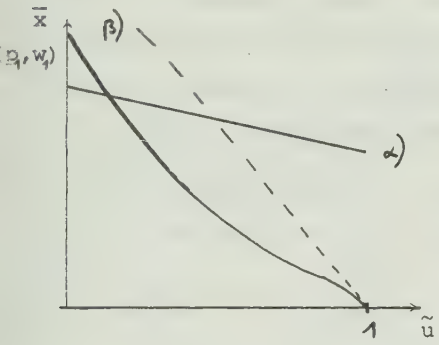
2) Werden die Voraussetzungen weiter abgeschwächt, geht noch mehr Struktur verloren, so etwa Aussage 5) , wenn man $h(p)$ nur als konkav mit $\beta h'(p) \leq 1$ voraussetzt.

Beweis:

1) Wurde schon bewiesen in Satz 7, Lemma 11 ;

2) wurde in Lemma [29] gezeigt .

3) ergibt sich sofort aus der geometrischen Darstellung und $c(\lambda) < c(.)$ (Satz 3) , $\ell(\lambda) = \ell(.)$, $V(\lambda) = V(.)$ (Lemma 7) für $\lambda > 1$.



denn α) fällt, $V(\underline{p}_1, w_1)$ bleibt konstant wie auch β). Damit fällt $\bar{x}$ und $\tilde{u}$ wächst nicht. Ist $F'(0) = \infty$, so kann β) niemals eine unendliche Steigung haben, dann gilt auch, da $\ell > 0$: $\tilde{u}(\lambda) > \tilde{u}(.)$.

4) Vollkommen analog zu 3) zeigt man, daß für $\lambda < 1$ $(\lambda \underline{p}_1, \lambda w_1) \notin K_g$, wenn $(\underline{p}_1, w_1) \in \tilde{U}_o \cup Y^*$ ist. Damit liegt in jeder Umgebung von $(\underline{p}_1, w_1)$ mit $(\underline{p}_1, w_1) \in \tilde{U}_o \cup Y^*$ ein Keynes-Gleichgewicht ($\lambda > 1$) und ein Punkt, der nicht zu K_g gehört ($\lambda < 1$) , mithin ist $\tilde{U}_o \cup Y^*$ Teilmenge des Gebietsrandes .

5) Wir gehen von $(\underline{p}_1^*, w_1^*)$ aus zu $(\lambda \underline{p}_1^*, \lambda w_1^*)$, $\lambda > 1$ über, damit fällt also α) , V und β) bleiben konstant. Gehen wir nun mit $\underline{p}_1 \to 0$, so wächst α) auch in $\tilde{u} = 1$ gegen unendlich , (Lemma 4a)) , β) verschiebt sich nach rechts für $\lambda > 0$, (Lemma27), und V ist nicht wachsend ($\frac{\partial V}{\partial \underline{p}_1} \geq 0$) (Lemma 5). Aus Stetigkeitsgründen gilt dann : Es gibt $\tilde{\underline{p}} < \lambda \underline{p}_1^*$ mit $(\tilde{\underline{p}}, \lambda w_1^*) \in Y^*$. Vollkommen analog zeigt man, daß für $\underline{p}_1 \to \infty$ kein $\tilde{\underline{p}} > \lambda \underline{p}_1^*$ existiert mit $(\tilde{\underline{p}}, \lambda w_1^*) \in Y^*$. Nun sei $\lambda < 1$, damit bleiben V und β) konstant , α) wächst. Geht man nun mit $\underline{p}_1 \to \infty$, so fällt α) , V ist nichtfallend, aber β) verschiebt sich nach links für $\ell > 0$. Damit kann kein $\tilde{\underline{p}} > \lambda \underline{p}_1^*$ existieren mit

$(\tilde{p},\lambda w^*) \in Y^*$, Y^* liegt also oberhalb von L . Der weitere Beweis vollzieht sich analog zu Hildenbrand [17] Satz 2, iii) .

Die Aussage, daß es zu jedem $p \geq p^*$ ein $w(p)$ gibt mit $(p,w(p)) \in Y^*$, d.h. also, daß Y^* keinen Pol besitzt, läßt sich deswegen nicht zeigen, da $\frac{\partial V}{\partial w} = 0$ sein kann. Im atemporären Fall gilt $V(p,w) \underset{w\to\infty}{\to} 0$. Es ist nämlich möglich, wenn für $w \to \infty$ $\beta)$ sich sehr schnell $\tilde{u} = 1$ nähert, und c_1 beschränkt bleibt, daß der Schnittpunkt von $\alpha)$ und $\beta)$ immer weit unterhalb von $V(p,w)$ liegt.

6) Sei $F_1(p,w,\tilde{u},\bar{x}) = \bar{x} - (1-\tilde{u})\ c^B(p,w) - \tilde{u}\ c^A(p,w) = 0$

$$F_2(p,w,\tilde{u},\bar{x}) = \ell(p,w,\bar{x}) - (1-\tilde{u})\bar{\ell} = 0$$

Wir lösen in F_1 nach $\bar{x}$ auf und setzen in F_2 ein :

$$\ell(p,w,(1-\tilde{u})\ c^B(p,w) + \tilde{u}\ c^A(p,w)) - (1-\tilde{u})\bar{\ell} = 0$$

Damit ist für $(p,w) \in \tilde{U}_{\bar{u}} := \{(p,w) \mid (p,w) \in K_g\ ,\ \tilde{u} = \bar{u}\ \}$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial p}\right|_{\tilde{u}=\bar{u}} = -\ \frac{\frac{\partial \ell}{\partial p} + \frac{\partial \ell}{\partial \bar{x}}\left((1-\bar{u})\frac{\partial c^B}{\partial p} + \bar{u}\frac{\partial c^A}{\partial p}\right)}{\frac{\partial \ell}{\partial w} + \frac{\partial \ell}{\partial \bar{x}}\left((1-\bar{u})\frac{\partial c^B}{\partial w} + \bar{u}\frac{\partial c^A}{\partial w}\right)}$$

Damit

$$\left.\frac{\partial w}{\partial p}\right|_{\tilde{u}=0} = -\ \frac{\frac{\partial \ell}{\partial p} + \frac{\partial \ell}{\partial \bar{x}}\frac{\partial c^B}{\partial p}}{\frac{\partial \ell}{\partial w} + \frac{\partial \ell}{\partial \bar{x}}\frac{\partial c^B}{\partial w}}$$

Da $\frac{\partial \ell}{\partial p} \geq 0$, $\frac{\partial \ell}{\partial w} \leq 0$, $\frac{\partial \ell}{\partial \bar{x}} > 0$ ist bei Unsicherheit keine eindeutige Aussage möglich . Herrscht Sicherheit darüber, daß die Firma morgen frei verkaufen kann, so kann es vorkommen -- wie schon erwähnt -- , daß bei nicht allzu starker Rationierung $\bar{x}$, etwa $\bar{x} > x_1 >> 0$ die Arbeitsnachfrage von $\bar{x}$ unabhängig ist, in einem solchen Fall gilt dann

$$\frac{\partial \ell}{\partial \bar{x}} = 0 \quad \text{und mithin} \quad \frac{\partial w}{\partial p}\Bigg|_{\substack{\tilde{u}=0 \\ \bar{x} > x_1}} = - \frac{\frac{\partial \ell}{\partial p}}{\frac{\partial \ell}{\partial w}} > 0$$

Das bedeutet dann allerdings nicht, daß in der Nähe des Gleichgewichts $\frac{\partial \bar{u}}{\partial w} < 0$ gilt, wie wir noch sehen werden.

Wir wollen zum Abschluß noch an zwei Beispielen zeigen, daß auf die gemachten Voraussetzungen nicht verzichtet werden kann :

Wir haben schon gesehen (Lemma 11 und Beispiel 6), daß bei linearen Erwartungen das Walras-Gleichgewicht eindeutig ist, daß aber ansonsten die Eigenschaft i.a. verloren geht. Wir betrachten dazu nochmals Beispiel 6 :

Haben Arbeitslose und Beschäftigte dieselbe Erwartung -- nämlich morgen sicher beschäftigt zu sein -- so gilt :

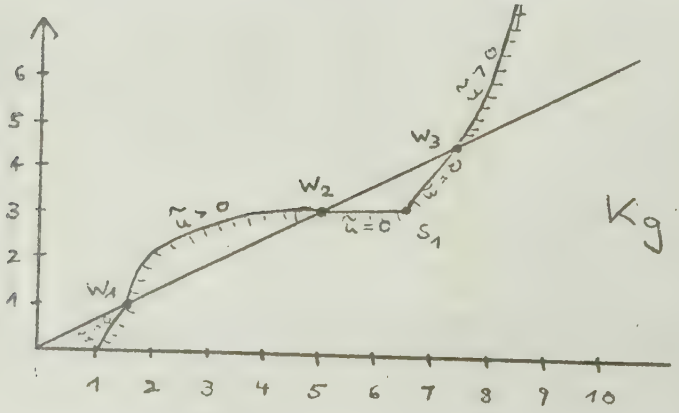
$$c_1^B = \begin{cases} \dfrac{3 + w_1 + w_1^2}{3\, p_1} & w_1 \leq 1 + \sqrt{7} \\ \dfrac{w_1 + 3}{p_1} & w_1 \geq 1 + \sqrt{7} \end{cases}$$

$$m_1^B = \begin{cases} \dfrac{6 + 2w_1 - w_1^2}{3} & w_1 \leq 1 + \sqrt{7} \\ 0 & w_1 \geq 1 + \sqrt{7} \end{cases}$$

$$c_1^A = \begin{cases} \dfrac{3 + w_1^2}{3\, p_1} & w_1 \leq \sqrt{6} \\ \dfrac{9}{3\, p_1} & w_1 \geq \sqrt{6} \end{cases}$$

$$m_1^A = \begin{cases} \dfrac{6 - w_1^2}{3} & w_1 \leq \sqrt{6} \\ 0 & w_1 \geq \sqrt{6} \end{cases}$$

Wie man sofort sieht, gilt immer $c_1^B > c_1^A$ und $m_1^B \geq m_1^A$ mithin sind die Keynes'schen Gleichgewichte eindeutig. Wir wissen nun aber, daß drei Walras Gleichgewichte existieren, der Bereich K_g hat das folgende Aussehen :



mit

$$U_o = \{(p,w) \mid w \le \tfrac{3}{5}p \text{ und } \begin{array}{ll} 3p = 3 + w + w^2 & w \le 1+\sqrt{7} \\ p = 3 + w & w \ge 1+\sqrt{7} \end{array} \}$$

und

$$y^* = \{(p,w) \mid w \ge \tfrac{3}{5}p \text{ und } \begin{array}{ll} \delta^{-\frac{3}{2}} = \gamma - \frac{w}{3p}(1-\delta^{-\frac{5}{2}}) & w \le \sqrt{6} \\ = \gamma + \varepsilon (1-\delta^{-\frac{5}{2}}) & w \in [\sqrt{6}, 1+\sqrt{7}\,] \\ = \rho - \frac{w}{p}(1-\delta^{-\frac{5}{2}}) & w \ge 1+\sqrt{7} \end{array}$$

mit $\delta := \frac{5w}{3p}$, $\gamma := \frac{3+w+w^2}{3p}$, $\varepsilon := \frac{6-w-w^2}{3p}$, $\rho := \frac{3+w}{p}$

Wegen der Mehrdeutigkeit der Walrasgleichgewichte ist eine vernünftige Komparative Statik nicht möglich, auch 5) von Satz 11 gilt nicht .

Vollkommen unübersichtlich wird die Situation, wenn die Erwartung q des Arbeitslosen abgeändert wird. Erwartet er mit Sicherheit, auch morgen arbeitslos zu sein, so gilt $m_1^A = 2$, $c_1^A = \frac{1}{p_1}$, die Grenzneigung zum Konsum ist nicht mehr kleiner gleich 1, es gibt dann zweideutige Keynes-Gleichgewichte, etwa den Bereich $\overline{W_2 S_1 W_3}$, der auch " repressed inflation Gleichgewichte" darstellt. Hier sind W_2 und W_3 zusätzlich echte Keynes-Gleichgewichte mit $\tilde{u} > 0$; als in einem bestimmten Sinne " stabiles " Walras-Gleichgewicht bleibt nur W_1 , das wir als eindeutiges Gleichgewicht erhalten, wenn wir die Lohnerwartung abändern in $g(w_1) = w_1$. Es erscheint somit notwendig, neben der Linearität der Preis-Lohn-Erwartung auch die Wahrscheinlichkeit q morgiger Beschäftigung anzugleichen.

Ähnliches gilt für den Produzenten :

Betrachten wir Beispiel 4 , in dem der Produzent eine konvexe Preiserwartung hat ($\beta h(p_1) = p_1^2$) so kann man zeigen, daß i.a. zwei Walras-Gleichgewichte existieren.

Abschließend sei noch gezeigt, daß bei temporärer Betrachtung der Firma der " Vierte Fall " nicht mehr nur zum Rand zwischen dem " Keynes "- und dem " Repressed-inflation " Gebiet entartet und daß positive Steigung von $\tilde{U}_o$ im Gleichgewicht nicht notwendig auch

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial w_1} < 0 \quad , \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial w_1} > 0$$

bedeutet.

Der Konsumsektor sei beschrieben durch :

$$\bar{\ell} = m_o = 1 \quad , \quad q = 0 \quad , \quad u(c_1, c_2) = \log c_1 + \log c_2$$

Wegen der speziellen Gestalt von u kann die Preiserwartung $f(p_1)$ hier beliebig sein, $\mathfrak{E}$ setzen wir aber $f(p_1)$ als linear an.

der Produktionssektor durch

$$g_o = 10 \quad , \quad \beta h(p_1) = a p_1 \quad , \quad a < 1 \quad , \quad F(\ell) = \sqrt{\ell} \quad ,$$

Absatzrationierungen auf dem morgigen Markt bestehen nicht.

Dann ist die Nachfrage (keine Rationierung) :

$$c_1^B = \frac{1 + w_1}{2 p_1} \qquad m_1^B = \frac{1 + w_1}{2}$$

$$V(p_1, w_1) = 10 \qquad \ell^N(p_1, w_1) = \begin{cases} \left(\frac{a p_1}{2 w_1}\right)^2 & w_1 \geq \frac{a^2 p_1}{40} \\ \frac{10 p_1}{w_1} & w_1 \leq \frac{a^2 p_1}{40} \end{cases}$$

Damit existiert nach Satz 7 (es herrscht zwar keine Unsicherheit über den morgigen Markt, aber V ist stetig , ℓ^N natürlich auch) und wegen Lemma 11 ein eindeutiges Walras-Gleichgewicht (p_1^*, w_1^*) mit $(p_1^*, w_1^*) = \left(\frac{2}{40-a} , \frac{a}{40-a} \right)$

Effektive Nachfrage (Konsument)

Für einen Arbeitslosen gilt $c_1^A = \frac{1}{2p_1}$, $m_1^A = \frac{1}{2}$

die mittlere effektive Güternachfrage ist damit

$$c(p_1, w_1, \tilde{u}) = (1 - \tilde{u})\left(\frac{1 + w_1}{2p_1}\right) + \tilde{u}\,\frac{1}{2p_1}$$

Effektive Nachfrage (Produzent)

Der Produzent sei mit $\bar{x}$ auf dem Gütermarkt rationiert, d.h. also $\bar{x} \leq 10$. Seine effektive Arbeitsnachfrage ergibt sich damit aus dem Problem

max $a p_1 F(\ell) - w_1 \ell$ Nebenbedingung : $p_1 \bar{x} \geq w_1 \ell$, somit

$$\ell(p_1, w_1, \bar{x}) = \begin{cases} \left(\frac{a p_1}{2 w_1}\right)^2 & \bar{x} \geq \frac{a^2 p_1}{4 w_1} \\ \frac{p_1}{w_1}\,\bar{x} & \bar{x} \leq \frac{a^2 p_1}{4 w_1} \end{cases} \quad , \quad \bar{x} \leq 10$$

Nun sei der Produzent durch $\bar{a}$ auf dem Arbeitsmarkt rationiert. Da er wegen des erwarteten niedrigeren Preises heute schon sein Gesamtlager verkauft, wird er nicht bereit sein, weniger zu ver-

kaufen, mithin gilt

$$V(p_1,w_1,\bar{a}) = V(p_1,w_1) = 10$$

Wir wollen nun im folgenden alle vier Bereiche in der (p_1,w_1) Ebene bestimmen. Durch einfaches Ausrechnen erhält man:

$$\tilde{U}_o = \{(p_1,w_1) \mid w_1 = \frac{ap_1}{2},\ p_1 \in [\frac{2}{40-a}, \frac{2}{a}]\} \cup \{(p_1,w_1) \mid \begin{matrix} w_1 = 1 \\ p_1 \geq \frac{2}{a} \end{matrix}\}$$

$$Y^* = \{(p_1,w_1) \mid w_1 = \frac{(ap_1)^2}{4(20p_1-1)},\ p_1 \in [\frac{1}{20}, \frac{2}{40-a}]\}$$

KL: $= \{(p_1,w_1) \mid \tilde{u} = 0$, der Konsument wird auf dem Gütermarkt rationiert $\} = \{(p_1,w_1) \mid w_1 = \frac{ap_1}{2},\ p_1 \in [0, \frac{2}{40-a}]\}$

IN: $= \{(p_1,w_1) \mid$ Firma wird auf dem Arbeitsmarkt rationiert $\}$

$$= \{(p_1,w_1) \mid w_1 = 20p_1 - 1,\ p_1 \in [\frac{1}{20}, \frac{2}{40-a}]\}$$

Das ergibt folgendes Bild :

Die Iso-$\tilde{u}$ Linien sind also zuerst Geraden mit positiver Steigung und dann parallel zur p_1-Achse. Indem w_1 vergrößert wird, wächst auch $\tilde{u}$, also $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial w_1} > 0$, für p_1 gilt $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial p_1} \leq 0$,

weiterhin $\frac{\partial \bar{x}}{\partial w_1} < 0$, $\frac{\partial \bar{x}}{\partial p_1} < 0$.

Da wir beim Produzenten Sicherheit vorausgesetzt haben, tritt hier der Fall ein, daß $\tilde{U}_o$ nicht unter, sondern teilweise auf L liegt, damit gilt auch nicht notwendig $\tilde{u}(\lambda p_1, \lambda w_1) < \tilde{u}(p_1, w_1)$, $\lambda > 1$, zum anderen hat Y^* einen Pol.

Ändern wir die Erwartung des Produzenten ab in $h(p_1) = ap_1$, $a > 1$, so gilt :

$$V(p_1, w_1) = \begin{cases} \frac{p_1}{4w_1} & \frac{p_1}{4w_1} \leq 10 \\ 10 & \frac{p_1}{4w_1} \geq 10 \end{cases}$$

$$\ell(p_1, w_1) = \begin{cases} \frac{p_1^2}{4w_1^2} & \frac{p_1}{4w_1} \leq 10 \\ \frac{10p_1}{w_1} & \frac{p_1}{4w_1} \geq 10 \end{cases}$$

Es existiert ein eindeutiges Walras-Gleichgewicht $(p_1^*, w_1^*) = (2,1)$ und das Keynes-Gebiet hat folgende Gestalt :

Die Iso-$\tilde{u}$-Linien sind $w_1 = \frac{1}{1-\tilde{u}}$ für $\tilde{u} = \bar{u}$; wir sehen, daß Lohnsteigerungen $\tilde{u}$ vergrößern und fallende Preise nur einen Effekt auf $\bar{x}$ haben können, da Iso-Absatzlinien $\bar{x} = \frac{1}{p_1}$ sind.

Interessant an diesen Beispielen ist folgendes :
Um Keynes'sche Arbeitslosigkeit zu beseitigen, wäre es also das beste, Preise und Löhne zu senken, wobei im zweiten Fall jede solche Politik, wenn man sie getrennt betreibt, entweder nur Auswirkungen auf $\tilde{u}$ oder auf den Absatz hat,

da gilt : $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial w_1} > 0$, $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial p_1} = 0$, $\frac{\partial \bar{x}}{\partial w_1} = 0$, $\frac{\partial \bar{x}}{\partial p_1} < 0$

Zusammenfassung :

Ziel dieser Arbeit war, die Existenz temporärer Gleichgewichte auch dann noch sicherzustellen, wenn die Marktteilnehmer wie in Patinkins " Money, Interest and Prices " lineare allgemein unbeschränkte Erwartungen über zukünftige Preise und Löhne haben. Wie schon von Grandmont [11] gezeigt wurde, ist die Existenz allgemein nicht zu sichern, man ist gezwungen, wenn man nicht die " Tightness - Bedingung " bezüglich der Preiserwartungen einführen will, Annahmen an die anderen Konsumenten (Produzenten) - Charakteristika zu machen. Es ergab sich weiterhin, daß unter den obigen Linearitätsannahmen auch die Eindeutigkeit - im Gegensatz zu beschränkten Erwartungen - gezeigt werden kann. Das ist eine notwendige Voraussetzung etwa für den Fall, in dem man Keynessche Gleichgewichte untersuchen will. Es wäre interessant, neben einer realitätsnäheren Behandlung des Produktionssektors ein weiteres Gut, etwa ein Wertpapier, einzuführen, um zu sehen, ob und wie die Voraussetzungen für die Existenz eines Gleichgewichtes abgeändert werden müßten. Da es bei einem risikofreien Papier möglich ist, daß dieses die Funktion des Geldes übernimmt, kann der Beweis eventuell zusammenbrechen. Ist das Papier jedoch ein " risky asset ", so wird man vermuten dürfen, daß die Existenz weiterhin gesichert bleibt. Alle diese Fragen müßten jedoch in einem erweiterten Modell untersucht werden.

Anhang

Satz 1

(siehe Hildenbrand [17], S. 273)

(L1) Es gibt $\overline{\ell}$, sodaß $0 < \ell(p,w) \leq \overline{\ell}$ für alle $(p,w) >> 0$

(L2) Die Arbeitsangebotsfunktion ist stetig differenzierbar in

p , w und $\frac{\partial \ell}{\partial w} \geq 0$

(C2) Die Nachfragefunktion c ist stetig in p und w

(C4) $\lim_{\substack{p_n \to 0 \\ w_n \to 0}} c(p_n, w_n) = \infty$

Für die Produktionsfunktion F gilt :

(F1) $F(0) = 0$, $\lim_{z \to \infty} F(z) = \infty$

(F2) F ist zweimal differenzierbar und $0 < F'(0) < \infty$

$\lim_{z \to \infty} F'(z) = 0$, $F'' < 0$

Dann gibt es ein Gleichgewicht .

Gilt zusätzlich :

(L3) $\ell(\lambda p , \lambda w) \geq \ell(p, w)$ für jedes $\lambda \geq 1$

(C2') c ist differenzierbar und $\frac{\partial c}{\partial p} < 0$, $\frac{\partial c}{\partial w} \geq 0$

(C3) $c(\lambda p, \lambda w) < c(p, w)$ für jedes $\lambda > 1$

So ist das Gleichgewicht auch eindeutig .

Wir haben dabei den Satz insoweit verändert, daß wir in die für Existenz und Eindeutigkeit notwendigen Voraussetzungen aufgespalten haben.

Satz 2 (siehe Hildenbrand, Core and Equilibria)

Seien S , T metrische Räume, $\beta : S \to T$ eine kompaktwertige und stetige Korrespondenz, $f : S \times T \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

a) $m : S \to \mathbb{R}$

$x \to m(x) := \max \{f(x, y) | y \in \beta(x)\}$ ist stetig

b) Die Relation $\xi : S \to T$

$x \to \{y \in \beta(x) | f(x, y) = m(x)\}$

ist eine u.h.c, kompaktwertige Korrespondenz.

Fußnoten :

1) Eine Funktion $u : \mathbb{R}^{\ell} \to \mathbb{R}$ heißt strikt konkav, wenn gilt :

$$u (\lambda y + (1-\lambda) y') > \lambda u(y) + (1-\lambda) u(y') \quad ,$$

$$\lambda \in]0, 1[\quad , \quad y \neq y'$$

u heißt strikt monoton wachsend, wenn gilt :

$$p > q \Rightarrow u(p) > u(q)$$

Symbolverzeichnis

$a = b$	a gleich b
$a \neq b$	a ungleich b
$a := b$	a definitionsgemäß gleich b
$a \Leftrightarrow b$	a genau dann wenn b
$a \Rightarrow b$	a impliziert b
$a \in K$	a Element der Menge K
$a \notin K$	a nicht Element von K
$A \times B$	Kartesisches Produkt der Mengen A und B
$A \setminus B$	$:= \{a \in A \mid a \notin B\}$
$A \subset B$	A Teilmenge von B
$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen
$\mathbb{R}^\ell$	ℓ-dimensionaler Euklidischer Raum
$\mathbb{R}_+$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
$\mathbb{R}_{++}$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
$[a,b]$	abgeschlossenes Intervall
(a,b)	offenes Intervall
$\|\| a \|\|$	$:= \sqrt{\sum_{i=1}^{\ell} a_i^2}$ für $a \in \mathbb{R}^\ell$
$a \geq b$	$:\Leftrightarrow a_i \geq b_i \quad 1 \leq i \leq \ell ; \quad a, b \in \mathbb{R}^\ell$
$a > b$	$:\Leftrightarrow a \geq b$ und $a \neq b$, $a, b \in \mathbb{R}^\ell$
$a >> b$	$:\Leftrightarrow a_i > b_i$ für alle i $(1 \leq i \leq \ell)$ $a, b \in \mathbb{R}^\ell$
u.h.c	oberhalb stetig
l.h.c.	unterhalb stetig
$\mathbb{R}^\ell_{++}$	$:= \{ x \in \mathbb{R}^\ell \mid x >> 0 \}$

Literaturverzeichnis

[1] Arrow, K.J.: The Theory of Risk Aversion, aus: Essays in the Theory of Risk Bearing (Amsterdam: North-Holland 197o), S. 9o-12o.

[2] Barro, R.J., Grossman, H.I.: A General Disequilibrium Model of Income and Employment, American Economic Review, March 1971, S. 82-93

[3] Barro, R.J., Grossman, H.I.: Money, Employment, and Inflation

[4] Benassy, J.P.: A Neokeynesian Model of Price and Quantity Determination in Disequilibrium, CEPREMAP, September 1974

[5] Benassy, J.P.: Neokeynesian Disequilibrium Theory in a Monetary Economy, RES 1975, S. 503-523

[6] Benassy, J.P.: Effective Demand, Quantitx Signals and Decision Theory, CEPREMAP, Paris 1976

[7] Clower, R.W.: A reconsideration of the micro-foundations of monetary theory, Western Economic Journal, 6, 1967.

[8] Clower, R.W.: The Keynesian Counterrevolution : A Theoretical Appraisal , in: [14]

[9] Drèze, J.,ed.: Allocation under Uncertainty, Equilibrium and Optimality, Macmillan, 1974.

[10] Foley, D., Hellwig, M.: Asset Management with Trading Uncertainty, RES 1976, S. 327-346.

[11] Grandmont, J.M.: On the Short-Run Equilibrium in a Monetary Economy, in: [3], S. 213-228.

[12] Grandmont, J.M., Laroque, G.: On Temporary Keynesian Equilibria, RES 1976, S. 53-67.

[13] Grandmont, J.M., Younes, Y.: On the Rate of Money and and the Existence of a Monetary Equilibrium, RES, 29, 1972, S. 355-371.

[14] Hahn, F.H., Brechling, F.; editors : The Theory of Interest Rates, Macmillan (1965)

[15] Hahn, F.H.: On some Problems of Proving the Existence of an Equilibrium in a Monetary Economy, in: [14]

[16] Hakansson, N.H.: Optimal Investment and Consumption Strategies under Risk for a class of Utility Functions, Econometrica, Sept. 1970, S. 587-607.

[17] Hildenbrand, K., Hildenbrand, W.: On Keynesian Equilibria with Unemployment and Quantity Rationing, JET , 1978 S. 255-277

[18] Hool, B.: Money, Expectations and the Existence of a Temporary Equilibrium, RES 1976, S. 439-445.

[19] Hool, B.: On Monetary Equilibrium in Professor Patinkin's Model, Department of Economics, University of Wisconsin, Madison, 1977.

[20] Leijonhufvud, A.: On Keynesian Economics and the Economics of Keynes, Oxford University Press, London 1968

[21] Malinvaud, E.: The Theory of Unemployment Reconsidered, 1977, Basic Blackwell, Oxford.

[22] Patinkin, D.: Money, Interest and Prices, Harper-Row, 1965.

[23] Pratt, J.: Risk-Aversion in the Small and in the Large, Econometrica, January-April 1964, S. 122-36.

[24] Samuelson, P.: Foundations of Economic Analysis, Harvard University Press, Cambridge, 1966.

[25] Sandmo, A.: Capital Risk, Consumption and Portfolio Choice, Econometrica, 1969, S. 586-99.

[26] Sandmo, A.: The Effect of Uncertainty on Saving Decisions, RES, 197o, S. 353-6o.

[27] Sondermann, D.: Temporary Competitive Equilibrium Under Uncertainty, in [3], S. 229-253

[28] Younès, Y.: On the Role of Money in the Process of Exchange and the Existence of a Non-Walrasian Equilibrium, RES 1975, S. 489-501

Lebenslauf

Am 26.4.195o wurde ich als 3. Kind des Prokuristen Franz Tillmann und seiner Ehefrau Maria, geb. Siepe, in Meschede geboren. Ostern 1956 wurde ich in die katholische Emhildisschule in Meschede eingeschult, von der ich 196o zum Gymnasium der Benediktiner überwechselte. Hier bestand ich am 22.5.1968 mein Abitur. Zum Wintersemester 68/69 nahm ich an der Universität Münster das Studium der Mathematik und der mathematischen Logik auf, das ich zum Sommersemester 74 mit dem Diplom abschloß. Seit März 75 bin ich als wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Wirtschaftstheorie, Leiter Professor Hildenbrand, der Universität Bonn beschäftigt. Nach Aneignung der nötigen wirtschaftstheoretischen Kenntnisse lege ich zur Zeit im Rahmen des "European Doctoral Programs" mein "preliminary year" hier in Bonn ab und bereite mich auf das "advanced year" sowie meine Promotion vor.

G. Tillmann